RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 marzo 1915.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota IV del Socio Vito Volterra.

42. Noi passeremo ora a studiare il caso in cui la lamina sia curva e sia soggetta ad un campo magnetico non uniforme. Il procedimento che seguiremo per giungere a questo caso generale, partendo dalle considerazioni già svolte per il caso della lamina piana soggetta ad un campo uniforme, consisterà nel decomporre la lamina in tanti elementi infinitesimi, ciascuno dei quali potremo riguardare come piano e soggetto ad un campo uniforme; ad ognuno di essi applicheremo, quindi, le formule fondamentali che svolgeremo opportunamente con l'impiego delle coordinate curvilinee. Ci sarà allora possibile passare da elemento ad elemento contiguo e considerare delle relazioni valide sull'intera superficie da cui ritrarremo come conseguenza le equazioni differenziali generali e le condizioni al contorno.

43. Consideriamo un elemento piano infinitesimo della lamina, adiacente ad un punto A, e riprendiamo le equazioni (1)

$$j_x = -K\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$j_y = -K\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

Sia ds un elemento lineare passante per A, e dn l'elemento normale, orientati fra loro come è stato detto nel § 1: cioè sia

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn} \quad , \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{dn} .$$

Avremo

$$j_n = j_x \frac{dx}{dn} + j_y \frac{dy}{dn} = -K\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \lambda \frac{\partial V}{\partial s}\right),$$

ove j_n denota la densità della corrente normale a ds.

Facendo uso di un sistema di coordinate curvilinee u e v, avremo

$$(20) \qquad j_n = -K\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial n} + \lambda\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)\right).$$

Ora, se il quadrato dell'elemento lineare è

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 ,$$

abbiamo (*)

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(F\dfrac{\partial u}{\partial s} + G\dfrac{\partial v}{\partial s}\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = \quad \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(E\dfrac{\partial u}{\partial s} + F\dfrac{\partial v}{\partial s}\right), \end{cases}$$

$$(\alpha') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s} = \quad \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(F\dfrac{\partial u}{\partial n} + G\dfrac{\partial v}{\partial n}\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} = -\dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(E\dfrac{\partial u}{\partial n} + F\dfrac{\partial v}{\partial n}\right); \end{cases}$$

e l'equazione (20) si scriverà

$$(20') \qquad j_n = -K\left[\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial s} + \\ + K\left[\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial s} .$$

(*) Si intenderà che la rotazione della linea $v =$ cost (presa nel senso in cui cresce la u) verso la linea $u =$ cost (presa nel senso in cui cresce la v), attraverso l'angolo minore di π, avvenga nello stesso verso in cui avviene, attraverso l'angolo retto, la rotazione della direzione positiva della linea s verso la direzione positiva della linea n. Supporremo inoltre di prendere qui, e nel seguito, il radicale $\sqrt{EG - F^2}$ positivo.

Supponiamo che la linea s coincida colla linea $u = \text{cost}$: allora l'equazione precedente diverrà

$$(21) \qquad j_{n_u} = K\left[\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]\frac{1}{\sqrt{G}},$$

ove j_{n_u} è la densità della corrente normale all'elemento della linea $u = \text{cost}$. Analogamente,

$$(21_1) \qquad j_{n_v} = -K\left[\frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]\frac{1}{\sqrt{E}} \ (*).$$

44. Tutte le formule precedenti valgono per un elemento piano infinitesimo. Ora, se la *lamina è curva* e si trova in un *campo magnetico costante o variabile*, per ogni elemento infinitesimo della superficie varranno le formule precedenti: solo dovremo supporre che K e $\lambda = \text{tg}\,\beta$ cambino da elemento a elemento; in altri termini, le formule precedenti varranno nel caso più generale di una lamina metallica di forma qualsiasi situata in un campo magnetico qualunque, purchè si considerino K e λ funzioni note di u e v. Per calcolarle, dovremo tener conto delle formole (2) e (3) in cui dovremo sostituire punto per punto ad H la componente della intensità del campo magnetico nel senso normale alla superficie, la quale sarà variabile, sia per la diversa inclinazione della normale rispetto alla direzione del campo magnetico, sia per la variabilità di esso [1].

45. Riprendiamo ora la formula (20′) valida su tutta la superficie, e formiamo

$$(22) \qquad \int_s j_n\,ds = \int_s \left\{ -K\left[\frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial s} + \right.$$
$$\left. + K\left[\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial s}\right\} ds,$$

(*) $\sqrt{G}$ e $\sqrt{E}$ debbono essere presi col segno positivo.

[1] Se il campo magnetico non è normale alla superficie, si producono delle azioni secondarie che fanno perdere alla lamina, per rapporto alla sua conducibilità, il carattere della isotropia (cfr. Winkelmann, Handb. der Physik, 2ª ediz., vol. V, pag. 458). Tali azioni costituiscono delle *perturbazioni* al fenomeno, come viene qui studiato. Ci si mette al riparo da queste perturbazioni disponendo la lamina secondo una *superficie di livello* nel campo magnetico, il quale in tal modo resulta normale alla lamina in ogni suo punto.

estesa ad una linea s qualunque chiusa, che non includa alcun elettrodo. Il primo membro sarà nullo e, per conseguenza,

$$(23)\quad -K\left[\frac{E\frac{\partial V}{\partial v}-F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}+\lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]du+K\left[\frac{G\frac{\partial V}{\partial u}-F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}-\lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]dv$$

dovrà essere un differenziale esatto. Chiamandolo dW avremo quindi

$$(24)\quad \begin{cases} -\sqrt{G}\,j_{n_u}=-K\left[\dfrac{G\frac{\partial V}{\partial u}-F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}-\lambda\dfrac{\partial V}{\partial v}\right]=-\dfrac{\partial W}{\partial v} \\ \sqrt{E}\,j_{n_v}=-K\left[\dfrac{E\frac{\partial V}{\partial v}-F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}+\lambda\dfrac{\partial V}{\partial u}\right]=\dfrac{\partial W}{\partial u}\,. \end{cases}$$

da cui segue che V soddisfa all'equazione differenziale

$$(F)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left\{K\left[\frac{G\frac{\partial V}{\partial u}-F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}-\lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\left\{K\left[\frac{E\frac{\partial V}{\partial v}-F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}+\lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]\right\}=0.$$

Risolvendo le equazioni (24) rispetto a $\frac{\partial V}{\partial u}$ e $\frac{\partial V}{\partial v}$ si ottiene

$$-\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{G\frac{\partial W}{\partial u}-F\frac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}+\lambda\frac{\partial W}{\partial v}\right]=\frac{\partial V}{\partial v}$$
$$-\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{E\frac{\partial W}{\partial v}-F\frac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}-\lambda\frac{\partial W}{\partial u}\right]=-\frac{\partial V}{\partial u},$$

e, per conseguenza, W soddisfa, all'equazione differenziale

$$(G)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{G\frac{\partial W}{\partial u}-F\frac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}+\lambda\frac{\partial W}{\partial v}\right]\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{E\frac{\partial W}{\partial v}-F\frac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}-\lambda\frac{\partial W}{\partial u}\right]\right\}=0.$$

46. Ritorniamo alla formula (22), e supponiamo che l'integrazione sia estesa ad una linea aperta s. In virtù della (24), avremo

$$\int_s j_n \, ds = \int_s dW = W_2 - W_1,$$

denotando con W_1 il valore di W all'origine dell'arco s, e con W_2 il valore all'altro estremo dell'arco stesso.

Ne segue che, *lungo le linee di corrente*, W *sarà costante*; e quindi, *lungo tutte le porzioni libere ed isolate del contorno*, W *sarà costante*, mentre *lungo tutti gli elettrodi di resistenza trascurabile*, V *sarà costante*.

Se supponiamo che non esistano forze elettromotrici interne nella lamina, V *sarà una funzione monodroma*, mentre W *resulterà polidroma percorrendo un ciclo chiuso qualsiasi che racchiude* (1) *degli elettrodi da cui entra nella lamina una quantità totale di elettricità diversa da zero*.

Se la lamina è semplicemente connessa e tutti gli elettrodi sono al contorno, W sarà evidentemente monodroma.

Alla funzione W daremo il nome di *funzione delle correnti*.

47. L'espressione di j_n [formula (20′)] può trasformarsi in più modi. Valendosi infatti delle (24), potremo scrivere

$$(20'') \qquad j_n = \frac{\partial W}{\partial s},$$

e, applicando invece le (α'), avremo

$$(20''') \quad j_n = -K \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\lambda \left(E \frac{\partial V}{\partial v} - F \frac{\partial V}{\partial u} \right)}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\lambda \left(G \frac{\partial V}{\partial u} - F \frac{\partial V}{\partial v} \right)}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \right\}.$$

Finalmente, sviluppando la (20″), cioè

$$j_n = \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s},$$

e tenendo conto delle (α'), si trova

$$(20^{IV}) \quad j_n = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(F \frac{\partial W}{\partial u} - E \frac{\partial W}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \left(G \frac{\partial W}{\partial u} - F \frac{\partial W}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \right\}.$$

(1) Alla parola *racchiude degli elettrodi* bisogna dare un senso generale intendendo tutti gli elettrodi che giacciono da una stessa parte della linea chiusa.

Le formule (21) e (21_1) possono ancora scriversi, tenendo presente le (24),

$$(21') \qquad j_{n_u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial W}{\partial v} \quad , \quad j_{n_v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial W}{\partial u} .$$

Chiamiamo j_u e j_v le proiezioni ortogonali della corrente nelle direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$; se ne otterranno subito i valori facendo nella (20''') coincidere successivamente n con le direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$, ed avremo

$$(25) \qquad \begin{cases} j_u = -\dfrac{K}{\sqrt{G}} \left(\dfrac{\partial V}{\partial v} + \lambda \dfrac{G \dfrac{\partial V}{\partial u} - F \dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \\ j_v = -\dfrac{K}{\sqrt{E}} \left(\dfrac{\partial V}{\partial u} - \lambda \dfrac{E \dfrac{\partial V}{\partial v} - F \dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right), \end{cases}$$

e, mediante W, le stesse quantità si esprimeranno colle formule:

$$(25') \qquad j_u = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{G \dfrac{\partial W}{\partial u} - F \dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) , \quad j_v = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{F \dfrac{\partial W}{\partial u} - E \dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) .$$

Decomponiamo finalmente la corrente secondo le direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$: troveremo, come componenti,

$$(26) \qquad \begin{cases} i_u = -\dfrac{K\sqrt{G}}{EG - F^2} \left(E \dfrac{\partial V}{\partial v} - F \dfrac{\partial V}{\partial u} + \lambda \sqrt{EG - F^2} \dfrac{\partial V}{\partial u} \right) \\ i_v = -\dfrac{K\sqrt{E}}{EG - F^2} \left(G \dfrac{\partial V}{\partial u} - F \dfrac{\partial V}{\partial v} - \lambda \sqrt{EG - F^2} \dfrac{\partial V}{\partial v} \right) \end{cases}$$

che, espressi mediante W, divengono

$$26') \qquad i_u = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial W}{\partial u} \quad , \quad i_v = -\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial W}{\partial v} .$$

Da qualunque gruppo di queste formule si ricava il quadrato della intensità della corrente che viene espresso da

$$(27) \qquad \begin{cases} j^2 = K^2(1 + \lambda^2) \left(\dfrac{E \left(\dfrac{\partial V}{\partial v} \right)^2 - 2F \dfrac{\partial V}{\partial u} \dfrac{\partial V}{\partial v} + G \left(\dfrac{\partial V}{\partial u} \right)^2}{EG - F^2} \right) \\ j^2 = \dfrac{E \left(\dfrac{\partial W}{\partial v} \right)^2 - 2F \dfrac{\partial W}{\partial u} \dfrac{\partial W}{\partial v} + G \left(\dfrac{\partial W}{\partial u} \right)^2}{EG - F^2} . \end{cases}$$

Queste formole si possono scrivere nel modo seguente, impiegando il simbolo del parametro differenziale del primo ordine,

$$(27') \qquad \begin{cases} j^2 = K^2(1+\lambda^2)\,\Delta_1 V \\ j^2 = \Delta_1 W\,. \end{cases}$$

48. Le espressioni ottenute per j_n ci forniscono sotto altre forme la condizione $j_n = 0$, lungo le porzioni libere ed isolate del contorno. Così, per esempio, servendoci della formula (20'''), potremo scrivere la condizione stessa mediante la equazione

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u} - \lambda\,\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial n} + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \lambda\,\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\frac{\partial v}{\partial n} = 0\,.$$

49. Supponiamo, adesso, che la lamina sia omogenea, e manchi il campo magnetico; avremo $K = \text{cost}$ e $\lambda = 0$: quindi le equazioni (F) e (G) diverranno

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\dfrac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\dfrac{G\dfrac{\partial W}{\partial u} - F\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{E\dfrac{\partial W}{\partial v} - F\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} = 0 \end{cases}$$

e potranno anche scriversi, facendo uso del simbolo del parametro differenziale del 2° ordine

$$(\beta') \qquad \Delta_2 V = 0 \qquad \Delta_2 W = 0\,.$$

V e W saranno quindi, come doveva prevedersi, due funzioni armoniche sulla superficie. Inoltre le (24) diverranno

$$(\gamma) \qquad \frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\partial \dfrac{W}{K}}{\partial v}\,, \qquad \frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} = -\frac{\partial \dfrac{W}{K}}{\partial u}\,.$$

Le condizioni (β') sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè V e W siano funzioni armoniche sulla superficie; le (γ), affinchè

$$V + i\frac{W}{K}$$

sia una variabile complessa sulla superficie [1].

[1] Cfr. Beltrami, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*. Opere, vol. I, pag. 318.

Ora, allorchè $K\lambda$ non è costante, le equazioni (F) e (G) differiscono essenzialmente dalle (β), e perciò V e W non sono funzioni armoniche sulla superficie.

Invece, nel caso delle lamine piane omogenee in un campo magnetico costante, il potenziale V si conserva armonico, anche quando agisce il campo magnetico (cfr. § 1); soltanto cambia la condizione a cui deve soddisfare al contorno nelle regioni di esso libere ed isolate. Dunque si manifesta una differenza sostanziale, nel caso che adesso trattiamo, rispetto ai precedenti: cioè, l'azione del campo magnetico, non solo muta le condizioni al contorno a cui deve verificare il potenziale, ove il contorno stesso è libero ed isolato, ma altera intimamente la natura del potenziale in tutta l'area occupata dalla lamina.

È facile stabilire, nel caso in cui K e λ sono costanti, la relazione che passa tra la funzione delle correnti e la funzione fondamentale U (§ 14).

Avremo infatti

$$W = KU',$$

ove U' è la funzione armonica coniugata della funzione U.

50. Riassumendo i resultati ottenuti, possiamo dire che, allorquando si passa dalla lamina piana alla lamina curva omogenea o non omogenea in un campo magnetico costante o variabile, si passa (dal punto di vista analitico) dalla equazione differenziale di Laplace a nuove equazioni differenziali di carattere diverso [le equazioni (F) e (G)]. Delle quattro funzioni (*potenziale*, *funzione fondamentale* e loro *coniugate*), due sole si conservano e cioè il *potenziale* e quella che abbiamo chiamato la *funzione delle correnti*. L'una e l'altra di queste perdono però il carattere di funzioni armoniche sulla superficie occupata dalla lamina: ed anzi è questa la ragione per la quale le altre due funzioni cessano di sussistere, in quanto che il potenziale e la funzione delle correnti non essendo armoniche, cioè non avendo il secondo parametro differenziale nullo, ma soddisfacendo invece alle equazioni (F) e (G), non possono avere funzioni coniugate nel senso della teoria delle funzioni di variabili complesse sopra una superficie.

Da tutto ciò discende che il principio degli elettrodi puntiformi al contorno (§ 23) non sussiste più nel caso attuale; come pure non vale più il principio che il potenziale rimane inalterato nel caso di lamine più volte connesse, allorchè le linee che formano il contorno sono elettrodi di resistenza trascurabile, su cui il valore del potenziale si mantiene inalterabile (§ 30).

51. Riconosciute così le essenziali diversità analitiche che si presentano secondochè si tratta del caso precedentemente svolto della lamina piana uniforme nel campo magnetico costante, o del caso generale che adesso si esamina (sebbene quest'ultimo si sia derivato dal precedente), passiamo a

mostrare l'esistenza d'un principio fondamentale di carattere invariantivo: *il principio generale di reciprocità* (vedi §§ 11, 12, 13, 28).

Dalle (20'), denotando con V_1 una funzione qualsiasi, e rappresentando con S il contorno (formato da una o più linee) di una parte σ della lamina, ove V e V_1 sono regolari, segue

$$(28)\quad \int_S V_1 j_n \, dS = \int_S \left\{ -K V_1 \left[\frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} + \lambda \frac{\partial V}{\partial u} \right] \frac{\partial u}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + K V_1 \left[\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} - \lambda \frac{\partial V}{\partial v} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \right\} dS$$

$$= \int_\sigma \frac{K}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{G\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial u} - F\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v}\right) + E\frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial V_1}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} + \right.$$

$$\left. + \lambda \left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v} - \frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} \right) \right\} d\sigma \,,$$

ove si è supposto di prendere n diretto verso l'interno di σ, e quindi si è fissata implicitamente la direzione s.

Denotiamo con $\Delta_1 V V_1$ il *parametro differenziale misto* o *intermedio* delle funzioni V e V_1, cioè

$$\Delta_1 V V_1 = \frac{G\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial u} - F\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v}\right) + E\frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial V_1}{\partial v}}{EG - F^2},$$

e scriviamo il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial u}, & \frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{\partial V_1}{\partial u}, & \frac{\partial V_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{d(V, V_1)}{d(u, v)} .$$

Si riconosce immediatamente che $\Delta_1 V V_1$ è simmetrico rispetto a V e V_1, mentre il determinante $\frac{d(V, V_1)}{d(u, v)}$ cambia segno scambiando V con V_1.

La equazione (28) potrà scriversi

$$(H)\quad \int_S V_1 j_n \, dS = \int_\sigma K \left(\Delta_1 V V_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(V, V_1)}{d(u, v)} \right) d\sigma \,.$$

52. Supponiamo, ora, che V_1 corrisponda ad un potenziale elettrico di correnti distribuite nella lamina quando il *campo magnetico è invertito.* In tale ipotesi dovremo mantenere inalterato K in ogni punto, e cambiare segno a λ.

Se in questo caso denotiamo con j_{1n} la densità della corrente normale ad S, e vogliamo stabilire la formula corrispondente alla precedente, dovremo scambiare nel secondo membro V con V_1, il che non altera il parametro simmetrico $\Delta_1 V V_1$, ma cambia segno al determinante $\frac{d(V,V_1)}{d(u,v)}$; però il termine corrispondente è moltiplicato per λ, il quale muta anch'esso segno per la inversione del campo, quindi i due cambiamenti di segno manterranno inalterato anche il secondo termine, onde avremo

$$(H') \qquad \int_S V j_{1n}\, dS = \int_\sigma K\left(\Delta_1 V V_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{d(V,V_1)}{d(u,v)}\right) d\sigma,$$

e quindi

$$(L) \qquad \int_S (V j_{1n} - V_1 j_n)\, dS = 0.$$

Se confrontiamo la formula (D) con la formula (L), riconosciamo che da questa possono ricavarsi le stesse conseguenze che abbiamo dedotto da quella, ed in particolare i *teoremi di reciprocità.*

53. Per esempio, supponiamo che, con il campo magnetico diretto, la corrente di intensità J entri da un elettrodo puntiforme A ed esca da un elettrodo B; e con il campo magnetico invertito la corrente J_1 entri da A_1 ed esca da B_1. Prendiamo S formato dal contorno s della lamina e da quattro circonferenze geodetiche s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1} aventi i centri in A, B, A_1 e B_1. Noi porremo la condizione che, almeno quando esse sono abbastanza piccole, prendendo n dall'interno all'esterno delle circonferenze stesse, j_n sia positivo su s_a, negativo su s_b e j_{1n} sia positivo su s_{a_1} e negativo su s_{b_1}; mentre V e V_1 siano finiti o divengano infiniti di ordine minore ad un numero più piccolo di 1.

Poichè sopra s, j_n e j_{1n} sono nulli, avremo

$$\int_{s_a} j_{1n} V ds_a + \int_{s_b} j_{1n} V ds_b + \int_{s_{a_1}} j_{1n} V ds_{a_1} + \int_{s_{b_1}} j_{1n} V ds_{b_1}$$

$$- \int_{s_a} j_n V_1\, ds_a - \int_{s_b} j_n V_1\, ds_b - \int_{s_{a_1}} j_n V_1\, ds_a - \int_{s_{b_1}} j_n V_1\, ds_{b_1} = 0,$$

da cui si ricava, passando al limite col far impiccolire indefinitamente i quattro circoli geodetici,

$$J_1(V_{A_1} - V_{B_1}) = J(V_{1A} - V_{1B}),$$

e quindi, se $J_1 = J$,

$$V_{A_1} - V_{B_1} = V_{1A} - V_{1B}.$$

Nello stesso modo, *tutti i teoremi di reciprocità* (relativi ad elettrodi di aree finite interni e di resistenze trascurabili o situati al contorno e pure di resistenze trascurabili) *si estendono, dal caso della lamina piana situata in un campo uniforme, al caso di una lamina curva in un campo uniforme o non uniforme.*

54. L'equazione (L) può scriversi ancora,

$$\int_S \left(V \frac{dW_1}{ds} - V_1 \frac{dW}{ds} \right) dS = 0:$$

ossia $V dW_1 - V_1 dW$ *sarà un differenziale esatto*, e questo sarà un altro modo di esprimere il teorema di reciprocità.

55. Poniamo, nella (H), $V_1 = V$, avremo allora

$$\text{(M)} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma K \Delta_1 V \, d\sigma ,$$

giacchè il determinante si annulla, ed il parametro misto diviene quello del primo ordine.

La stessa formula può scriversi

$$\text{(M')} \qquad \int_S V \frac{dW}{ds} \, dS = \int_\sigma K \Delta_1 V \, d\sigma ,$$

o anche

$$\text{(M'')} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K(1+\lambda^2)} j^2 \, d\sigma ,$$

oppure

$$\text{(M''')} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K(1+\lambda^2)} \Delta_1 W \, d\sigma .$$

I primi membri delle precedenti equazioni misurano la quantità di energia che penetra nell'area σ attraverso il contorno, nell'unità di tempo. Se quindi prendiamo σ infinitamente piccolo, sarà

$$\frac{1}{K(1+\lambda^2)} j^2 \, d\sigma$$

la quantità di calore Joule che si sviluppa in ogni elemento superficiale della lamina.

Dalla (M') poi segue che, se V è nullo in una certa porzione del contorno S, e nelle rimanenti parti W è costante, V è nulla entro tutta l'area σ. Di qui resulta che, se certe porzioni del contorno sono degli elettrodi di resistenza trascurabile ove è noto il valore del potenziale o la intensità della corrente che penetra nella lamina, e le rimanenti sono libere ed isolate, la distribuzione delle correnti sarà determinata (cfr. §§ 3 e 4).

Matematica. — *Sulla risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra.* Nota del Corrisp. O. Tedone.

I.

Il problema della integrazione indefinita dell'equazione

$$\sum_1^p i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + k\varphi = 0 \tag{1}$$

col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra, conduce, nel modo più naturale, a porre la quistione di determinare la funzione $\varphi(\tau)$ dall'equazione integrale

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n \,\mathrm{I}_{n+\lambda}\left[\sqrt{k}\,(t-\tau)\right] d\tau = \Phi(t) \tag{2}$$

in cui $\Phi(t)$ è una funzione nota tale che l'equazione integrale stessa sia possibile. $n = \frac{p-3}{2}$ e, per ogni valore di ν che non sia intero negativo,

$$\mathrm{I}_\nu(z) = \sum_0^\infty s \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Pi(\nu+s)}$$

con $\Pi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx$, per $\alpha > -1$, e $\Pi(\alpha+1) = (\alpha+1)\Pi(\alpha)$.

Nell'equazione (2), inoltre, λ non risulta, *a priori*, assoggettato ad alcuna limitazione, e potrebbe, a rigore, essere un numero qualunque; ma, per i bisogni della integrazione della (1), vien naturale ed è più che sufficiente il supporlo intero. Infine, lasciando da parte il caso speciale di $p = 1$, il numero n, appena è $p > 2$, è sempre positivo ed eguale ad un numero intero, ovvero alla metà di un intero dispari, mentre, per $p = 2$, è $n = -\frac{1}{2}$.

In alcune Note, precedentemente pubblicate in questi stessi Rendiconti, abbiamo avuto occasione di risolvere l'equazione (2) in numerosi casi, avendo di mira, principalmente, la integrazione della (1). E nelle ricerche contenute nelle citate Note, il caso di $p = 2$, $(n = -\frac{1}{2})$ si presentava con caratteri d'eccezione e di maggiori difficoltà, mentre, d'altra parte, dà luogo ad equazioni integrali notevolissime come la seguente:

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{\mathrm{Sen}\left[\sqrt{k}\,(t-\tau)\right]}{t-\tau} d\tau = \Phi(t), \tag{2'}$$

dove Sen è, al solito, il simbolo di seno iperbolico, e che si ottiene dalla (2) per $n = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = 0$. Ci siamo perciò indotti a riprendere e ad approfondire lo studio dell'equazione (2), imponendoci, *a priori*, le sole limitazioni che λ sia un numero intero e che n sia un numero intero, ovvero la metà di un intero dispari, positivo, o negativo; e con l'altre limitazioni, naturali, che, per n intero, sia $n + \lambda \geq 0$ e che, in ogni caso,

$$(t - \tau)^n \, I_{n+\lambda}\left[\sqrt{k}(t - \tau)\right]$$

sia finito per $t = \tau$. Nella presente Nota riportiamo quelli dei risultati ottenuti che ci sono parsi non privi di interesse. Ma dobbiamo subito avvertire che i ripetuti sforzi fatti per ottenere, con un procedimento finito, la soluzione della (2′) e di quelle altre equazioni che alla (2′) si possono ricondurre, sono riusciti sempre vani. D'altra parte la teoria generale delle equazioni integrali non sembra sufficientemente avanzata, così da poterci dare risposta alla domanda se un tale procedimento finito, nel caso della (2′), sia, o no, possibile.

Per maggiore semplicità supporremo, nel sèguito, sempre $k = 1$.

II.

Formole fondamentali.

1. Sono notissime e, del resto, si dimostrano con tutta facilità, le formole fondamentali seguenti della teoria delle funzioni di Bessel:

$$(A) \qquad \frac{d}{dz}\left[z^\nu \, I_\nu(z)\right] = z^\nu \, I_{\nu-1}(z) \quad , \quad \frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} \, I_\nu(z)\right] = z^{-\nu} \, I_{\nu+1}(z)$$

le quali valgono per ogni valore di ν, diverso da zero, anche negativo, purchè non sia intero negativo. Per $\nu = 0$, le (A) sono sostituite dall'unica relazione

$$(A') \qquad \frac{d\, I_0(z)}{dz} = I_1(z) \, .$$

Le (A) dànno luogo immediatamente alle altre:

$$(A_1) \qquad I'_\nu(z) + \frac{\nu}{z} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) \quad , \quad I'_\nu(z) - \frac{\nu}{z} I_\nu(z) = I_{\nu+1}(z) \, ,$$

nelle quali gli accenti indicano delle derivate, e queste ultime, a loro volta, per somma e per differenza, dànno luogo alle:

$$(A_2) \qquad 2\, I'_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) \quad , \quad \frac{2\nu}{z} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) \, .$$

Dalle (A) discendono pure le altre formole notevolissime:

$$(A_3)\qquad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dz^2}-1\right)[z^\nu I_\nu(z)] = (2\nu-1)\, z^{\nu-1} I_{\nu-1}(z)\,, \\ \left(\frac{d^2}{dz^2}-1\right)[z^{-\nu} I_\nu(z)] = -(2\nu+1)\, z^{-(\nu+1)} I_{\nu+1}(z)\,; \end{cases}$$

e, da queste, quando ν è un intero positivo, si ottiene:

$$(A_4)\qquad \begin{cases} I_0(z) = \frac{1}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\left(\frac{d^2}{dz^2}-1\right)^\nu [z^\nu I_\nu(z)]\,, \\ z^{-\nu} I_\nu(z) = \frac{(-1)^\nu}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\left(\frac{d^2}{dz^2}-1\right)^\nu I_0(z)\,. \end{cases}$$

2. Alle precedenti formole faremo ora seguire un'altra serie di formole che, in certo modo, possono considerarsi come una generalizzazione delle prime. Poniamo

$$(3)\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n\, I_m(t-\tau)\, d\tau = \Phi_{n,m}(t)\,,$$

e supponiamo che, se m è intero, sia anche $m \geq 0$. Derivando l'equazione precedente, rispetto a t, nell'ipotesi, dapprima, che $m+n>0$, in due modi diversi, considerando $(t-\tau)^n I_m(t-\tau)$, una volta come prodotto di $(t-\tau)^{n-m}$ e di $(t-\tau)^m I_m(t-\tau)$, un'altra volta come prodotto di $(t-\tau)^{n+m}$ e di $(t-\tau)^{-m} I_m(t-\tau)$, e tenendo conto della (A), si trova:

$$(B)\qquad \begin{cases} \Phi'_{n,m} = (n-m)\,\Phi_{n-1,m} + \Phi_{n,m-1}\,, \\ \Phi'_{n,m} = (n+m)\,\Phi_{n-1,m} + \Phi_{n,m+1}\,; \end{cases}$$

e queste formole sono equivalenti alle altre:

$$(B_1)\qquad \begin{cases} (n+m)\,\Phi_{n,m-1} - 2m\,\Phi'_{n,m} - (n-m)\,\Phi_{n,m+1} = 0\,, \\ 2m\,\Phi_{n-1,m} = \Phi_{n,m-1} - \Phi_{n,m+1}\,. \end{cases}$$

Le (B) restano valide anche nell'ipotesi di $n=m$; nella quale ipotesi la prima delle (B), o delle (B_1), si riduce semplicemente a

$$(B')\qquad \Phi'_{n,n} = \Phi_{n,n-1}\,.$$

Se poi è $n+m=0$, abbiamo

$$(B'')\qquad \Phi'_{-n,n} = \Phi_{-n,n+1} + \frac{1}{2^n\, \Pi(n)}\varphi(t)\,.$$

Citiamo ancora le formole seguenti, che sono analoghe alle (A_3):

$$(B_2)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\Phi_{n,n}(t)=(2n-1)\,\Phi_{n-1,n-1}(t), & n>0, \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\Phi_{-n,n}(t)=-(2n+1)\,\Phi_{-(n+1),n+1}(t)+\frac{1}{2^n\,\Pi(n)}\,\varphi'(t). \end{cases}$$

3. Nel caso in cui gli indici delle funzioni di Bessel sono interi positivi, o nulli, accanto alle relazioni (A), (A_1), (A_2), (A_3) fra queste funzioni e le loro derivate, ed alle quali si può dare il nome di formole differenziali, altre ne sussistono alle quali si potrebbe dare, ci pare, molto opportunamente, il nome di formole integrali e che si possono ottenere combinando le citate formole differenziali con l'identità fondamentale

$$(C)\qquad I_1(x_1-x_0)=\frac{\partial}{\partial x_1}I_0(x_1-x_0)=\int_{x_0}^{x_1}I_0(x_1-x)\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx$$

da noi dimostrata [1]. Di tutte le formole che così potrebbero ricavarsi, noi terremo conto soltanto delle più importanti e che si mostreranno utili a raggiungere lo scopo propostoci. Derivando successivamente la (C), rispetto ad x_1, e tenendo conto della (A_2), si trova

$$(C_1)\qquad I_n(x_1-x_0)=2\,I'_{n-1}(x_1-x_0)-I_{n-1}(x_1-x_0)=$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}I_{n-1}(x_1-x)\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx;$$

e da questa, ancora con l'aiuto delle stesse relazioni (A_2), discende

$$(C_2)\qquad n\,\frac{I_n(x_1-x_0)}{x_1-x_0}=2(n-1)\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_{n-1}(x_1-x_0)}{x_1-x_0}-(n-2)\,\frac{I_{n-2}(x_1-x_0)}{x_1-x}=$$
$$=(n-1)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_{n-1}(x_1-x)}{x_1-x}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx.$$

Notiamo pure la formola

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-1\right)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_1(x_1-x_0)}{x_1-x_0}-(2n+1)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_{n+1}(x_1-x)}{(x_1-x)^{n+1}}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx.$$

(1) *Sulla integr. dell'equaz. delle onde smorzate* ecc. Questi Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 1° sem.

Da essa, col metodo dell'induzione completa, ricaviamo la formola generale seguente:

$$(C_3)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx = \sum_0^{n-1}{}' \frac{(-1)^i}{2^{n-i-1}(n-i-1)!\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots(2n-2i-1)} \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-1\right)^i \frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_1(x_1-x_0)}{x_1-x_0},$$

nella quale l'accento sulla sommatoria sta ad indicare che l'ultimo termine, in essa, dev'essere ancora moltiplicato per due. Dalla (C_3), con l'aiuto della seconda delle (A_3), si deduce anche l'altra formola

$$(C_4)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx = \sum_1^n{}' \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)}{2^{n-i}(n-i)!\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots(2n-2i+1)}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_i(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^i}.$$

4. Si possono costruire formole integrali anche tra le $\Phi_{n,m}$. Qui ricorderemo soltanto la formola seguente, da noi dimostrata in un'altra Nota [1],

$$(D)\qquad \Phi_{0,n-1}(t) = 2\Phi'_{0,n}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,n}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,.$$

e la sua inversa

$$(D_1)\qquad \Phi_{0,n}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,n-1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,.$$

III.

Studio, per $n \geq m$, dell'equazione

$$(4)\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n\,I_m(t-\tau)\,d\tau = \Phi_{n,m}(t)\,.$$

1. Nella ipotesi che sia $n \geq m$, la equazione (4) si risolve, tanto nel caso in cui n ed m sieno interi, quanto in quello in cui n ed m sieno entrambi metà di numeri dispari.

Supponiamo dapprima n ed m interi e che quindi sia anche $m \geq 0$. Se $m = n$, l'equazione (4) è stata già da noi risoluta nella Nota ultimamente citata. Da $\Phi_{n,n}$ si ricava $\Phi_{0,0}$ con la formola

$$(5)\qquad \Phi_{0,0} = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,I_0(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)^n \Phi_{n,n}$$

[1] *Su l'inversione di alcuni integrali* ecc. Questi Rend.., vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem.

e, trovata $\Phi_{0,0}$, si ha poi subito

$$(5') \qquad \varphi(t) = \Phi'_{0,0}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau .$$

Ciò posto, è chiaro, per quello che ora abbiamo ricordato, che l'equazione (4) sarà risoluta se avremo il modo di calcolare $\Phi_{n,n}$ per mezzo di $\Phi_{n,m}$. A questo scopo notiamo che, supposto noto $\Phi_{n,n}$, dalla (B') abbiamo $\Phi_{n,n-1} = \Phi'_{n,n}$, mentre la prima delle (B_1), ponendo, per m, in questa ultima formola, successivamente, $n-1, n-2, \ldots, m+1$, ci dà, nello stesso ordine, $\Phi_{n,n-2}, \Phi_{n,n-3}, \ldots, \Phi_{n,m}$. $\Phi_{n,m}$ si può quindi esprimere per mezzo di $\Phi_{n,n}$ con l'aiuto di un'espressione differenziale, lineare, a coefficienti costanti. Ne viene che, inversamente, dato $\Phi_{n,m}$, si otterrà $\Phi_{n,n}$ risolvendo un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto. Il problema è determinato, potendosi ricavare dalla definizione stessa di $\Phi_{n,n}$ i valori che questa funzione e le sue derivate assumono per $t = t_0$. La quistione che ci siamo proposta, si può dunque considerare risoluta.

Si tratti, per es., di risolvere l'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^2\, I_0(t-\tau)\, d\tau = \Phi_{2,0}(t) .$$

Abbiamo allora

$$\Phi_{2,1} = \Phi'_{2,2} \quad , \quad 3\Phi_{2,0} = 2\Phi'_{2,1} + \Phi_{22} = 2\Phi''_{2,2} + \Phi_{22} ,$$

e perciò $\Phi_{2,2}$ è la soluzione dell'equazione

$$\Phi''_{2,2} + \frac{1}{2}\Phi_{2,2} = \frac{3}{2}\Phi_{2,0}$$

che si annulla, insieme con la sua derivata, per $t = t_0$: ossia è

$$\Phi_{2,2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{t_0}^{t} \Phi_{2,0}(\tau)\, \operatorname{sen} \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\, d\tau .$$

Da $\Phi_{2,2}$ si ricava poi la funzione $\varphi(t)$, con l'aiuto delle (5) e (5').

2. Lo stesso metodo precedente vale a risolvere l'equazione (3) anche nel caso in cui m ed n sono entrambi metà di numeri dispari, nella ipotesi, sempre, di $n \geq m$.

Se infatti è $m = n$, come abbiamo dimostrato nella stessa Nota ultimamente citata, è

$$(6) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2 \cdot 4 \ldots (2n-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)^{n+\frac{1}{2}} \Phi_{n,n}(t) .$$

Se poi, invece, $n > m$, come precedentemente, si determinerà, dapprima, $\Phi_{n,n}$ per mezzo di $\Phi_{n,m}$, e quindi la funzione $\varphi(t)$ con l'aiuto della (6). Nel caso, anzi, che ora consideriamo può darsi ad m anche un valore negativo purchè, naturalmente, sia $n + m \geq 0$, chè il procedimento non soffre eccezioni.

Si tratti, per un es., di risolvere l'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^{2}\,\mathrm{Sen}\,(t-\tau)\,d\tau = \Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}\,.$$

In questo caso $\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}$ è la soluzione dell'equazione

$$\Phi''_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\,\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} = \frac{4}{3}\,\Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}$$

che si annulla, insieme con la derivata, per $t = t_0$: ed è perciò

$$\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{t_0}^{t} \Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}(\tau)\,\mathrm{sen}\,\frac{t-\tau}{\sqrt{3}}\,d\tau\,,$$

Dall'espressione precedente di $\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}$ ricaviamo poi la funzione $\varphi(t)$ con l'aiuto della (6).

IV.

Risoluzione dell'equazione (4) per n ed m interi e $0 \leq n < m$.

1. Quando $n = 0$, ed m è un intero positivo, l'equazione (4) è stata da noi risoluta nell'ultima Nota più volte citata, con l'aiuto della (D). Possiamo dunque lasciare da parte questo caso, e supporre senz'altro che sia $n > 0$. Vogliamo però, prima, notare che, se oltre di $\Phi_{n,m}$, fosse nota $\Phi_{n,m-1}$, ovvero $\Phi_{n,m+1}$, la prima delle (B_1) ci darebbe il modo di calcolare tutte le Φ col primo indice eguale ad n. Ed allora, com'è stato osservato in altro posto (1), con l'aiuto della seconda delle (B_1), si potrebbero dedurre anche tutte le Φ col primo indice minore di n. In particolare si potrebbero calcolare $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$, dalle quali si dedurrebbe, immediatamente,

$$\varphi(t) = \Phi'_{0,0}(t) - \Phi_{0,1}(t)\,.$$

(1) *Sull'integrazione delle equazioni* ecc. Questi Rendiconti, vol. XXIII, ser. 5ª, 2° sem., pag. 154.

Si può concludere allo stesso modo anche nel caso in cui, oltre di $\Phi_{n,m}$, forse nota un'altra qualunque Φ con indici interi. Però, in questa ipotesi più larga, per determinare $\varphi(t)$ bisogna anche risolvere un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti con termine noto, come ci si convince facilmente.

Supponiamo, ora, che sia data soltanto $\Phi_{n,m}$ con $0 < n < m$ ed n ed m interi. Per quello che è stato precedentemente detto, il problema della determinazione di $\varphi(t)$, in questo caso, si può ricondurre alla determinazione di $\Phi_{n,m-1}$, ovvero di $\Phi_{n,m+1}$. Proponiamoci di calcolare $\Phi_{n,m-1}$. Assunta questa quantità, momentaneamente, come nota, possiamo calcolare, come sopra è stato indicato, $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$. Ricordiamo, quindi, che fra queste due ultime espressioni sussistono le due relazioni seguenti, inverse una dell'altra:

$$(7)\qquad \begin{cases} \Phi_{0,0} = 2\Phi'_{0,1} - \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Phi_{0,1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,, \\ \Phi_{0,1} = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,, \end{cases}$$

e notiamo che $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$ sono, ciascuna, somma di un'espressione differenziale lineare a coefficienti costanti di $\Phi_{n,m-1}$, e di un'altra tale espressione di $\Phi_{n,m}$. Con integrazioni per parti si possono ridurre quelle parti degli integrali

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_{0,1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau \quad \text{e} \quad \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,,$$

che contengono $\Phi_{n,m-1}$, alla somma di una espressione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, di $\Phi_{n,m-1}$ stessa, e di un termine proporzionale a

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_{n,m-1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,.$$

Eliminando questo integrale fra le due equazioni (7), così trasformate, si ottiene un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto, in $\Phi_{n,m-1}$ e dalla quale quest'ultima funzione si potrà determinare.

Illustreremo il metodo ora esposto applicandolo al caso particolare della risoluzione dell'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)\,I_2(t-\tau)\,d\tau = \Phi_{1,2}(\tau)\,.$$

Seguendo la strada indicata, troviamo dapprima

$$\Phi_{0,0} = \left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)\Phi_{1,1} \quad , \quad \Phi_{0,1} = \frac{1}{2}\,(\Phi'_{1,1} - \Phi_{1,2})\,,$$

e le equazioni (7), con integrazioni per parti, com'è stato detto, si riducono facilmente a

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \Phi_{1,1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi_{1,1}(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Phi_{1,2}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{1,2}(t)\,,$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\int_{t_0}^{t} \Phi_{1,1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}\,\Phi'_{1,1}(t) = -\frac{1}{2}\,\Phi_{1,2}(t)\,,$$

dalle quali si ottiene subito l'equazione

$$\frac{d^2\Phi_{11}}{dt^2} - \frac{4}{3}\,\Phi_{11} =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\left\{\int_{t_0}^{t} \Phi_{1,2}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{1,2}(t)\right\} - \frac{1}{3}\,\Phi'_{1,2}(t)$$

che serve a determinare $\Phi_{1,1}$.

V.

Risoluzione dell'equazione (4) per m intero positivo ed n intero negativo.

Si abbia da risolvere la nostra equazione, dapprima, nel caso particolare

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)\,\frac{I_n(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\,d\tau = \Phi_{-n,n}(t)\,, \tag{8}$$

con n intero, maggiore di zero. Si può raggiungere lo scopo, in questo caso, moltiplicando, intanto, i due membri di (8) per $\dfrac{I_1(t_1-t)}{t_1-t}\,dt$ ed integrando fra t_0 e t_1. Invertendo, quindi, al primo membro, le due integrazioni, applicando la (C_4) e tenendo conto della (8) stessa, si può scrivere

$$\sum_{1}^{n-1} i\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2i-1)}{2^{n-i}(n-i)!\,(2n-1)\,(2n-3)\,\ldots\,(2n-2i+1)}\times \tag{9}$$

$$\times\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{I_i(t-\tau)}{(t-\tau)^i}\,d\tau - \frac{1}{2^{n-1}\,n!}\,\varphi(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Phi_{-n,n}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{-n,n}(t)\,.$$

Basta allora applicare, ad ambo i membri di questa equazione, $n-1$

volte l'operazione $\frac{d^2}{dt^2} - 1$, tener conto delle seconde equazioni (A_3) e (B_2) e della (8) stessa per trasformare, con tutta facilità, la (9) in un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto, nella funzione $\varphi(t)$, dalla quale equazione quest'ultima funzione si potrà determinare.

Termineremo i calcoli nel caso in cui, in (8), si supponga $n = 2$. In questo caso la sommatoria, al primo membro della (9), contiene un termine solo, e questa equazione si pone subito sotto la forma

$$(9') \qquad \frac{1}{2 \cdot 3}\left[\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}\,\varphi(t)\right] - \frac{1}{2^2}\,\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi_{-2,2}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{-2,2}(t).$$

Applicando, quindi, ad ambo i membri di essa, l'operazione $\frac{d^2}{dt^2} - 1$, con l'aiuto delle osservazioni stesse che sono state fatte in generale, si trova l'equazione

$$(10) \qquad \varphi''(t) - \frac{4}{3}\,\varphi(t) = 2^2\left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)\left\{2\Phi'_{-2,2}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{-2,2}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\right\} - 2\Phi'_{-2,2}(t).$$

Potendosi, infine, ricavare dalla (9') i valori di φ e di φ', per $t = t_0$, l'equazione (10) determina facilmente e completamente la funzione $\varphi(t)$.

2. Consideriamo ora il caso, più generale, dell'equazione

$$(11) \qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{I_m(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\,d\tau = \Phi_{-n,m}(t)$$

con $m > n$. Assumiamo come incognita ausiliaria $\Phi_{-n,m-1}$ e notiamo che la solita equazione prima delle (B_1), la quale, mutando n in $-n$, si scrive

$$(m-n)\,\Phi_{-n,m-1} - 2m\,\Phi'_{-n,m} + (m+n)\,\Phi_{-n,m+1} = 0,$$

ci permette, ponendo, per m, in essa, successivamente, $m-1, m-2, \ldots, n+1$ di calcolare, nello stesso ordine, per mezzo di $\Phi_{-n,m}$ e di $\Phi_{-n,m-1}$, le altre quantità $\Phi_{-n,m-2}, \Phi_{-n,m-3}, \ldots, \Phi_{-n,n}$. Teniamo quindi conto dell'equazione

$$(12) \qquad \Phi'_{-n,n} = \Phi_{-n,n+1} + \frac{1}{2^n\,n!}\,\varphi(t),$$

della relazione

$$(13) \qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{I_n(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\,d\tau = \Phi_{-n,n}(t),$$

e della (9) che è una conseguenza integrale di quest'ultima. Se in (12) si sostituiscono a $\Phi_{-n,n}$. $\Phi_{-n,n+1}$ le espressioni calcolate innanzi per mezzo di $\Phi_{-n,m}$. $\Phi_{-n,m-1}$, ed il valore di $\varphi(t)$ che si può ricavare da questa equazione sia sostituito nella (13) e nella (9), basterà operare su queste due ultime equazioni come in IV. 1 per ricavare un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti in $\Phi_{-n,m-1}$, dalla quale quest'ultima funzione si potrà determinare

Si tratti, p. es., di determinare $\varphi(t)$ dall'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{I_2(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau = \Phi_{-1,2}(t).$$

Possiamo scrivere intanto le tre equazioni

$$\Phi'_{-1,1} = \Phi_{-1,2} + \frac{1}{2}\varphi(t) \quad , \quad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau = \Phi_{-1,1} ,$$

$$\varphi(t) = 2\Phi'_{-1,1}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{-1,1}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau ,$$

e, con procedimento anche più spedito che non nel caso generale, eliminando $\varphi(t)$ fra la prima e la terza di queste equazioni, si ottiene l'equazione seguente

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_{-1,1}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau = 2\Phi_{-1,2}(t),$$

che serve a determinare $\Phi_{-1,1}$ per mezzo di $\Phi_{-1,2}$. Abbiamo infatti subito

$$\Phi_{-1,1} = 4\Phi'_{-1,2} - 2\int_{t_0}^{t} \Phi_{-1,2}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau ,$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\varphi(t) = 4\Phi''_{-1,2} - \Phi_{-1,2} - 2\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \Phi_{-1,2}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau .$$

3. Osserviamo, qui, che l'equazione (4), con l'aiuto delle solite formole fondamentali contenute in II, si risolve anche in tutti casi in cui m ed n sono metà di interi dispari, se si riesce a risolverla nel caso di $n = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ che è quello sul quale abbiamo richiamato l'attenzione fin dal principio.

Aggiungiamo, infine, che i metodi precedenti, convenientemente estesi, permettono di determinare la funzione φ anche nel caso in cui, invece di una sola $\Phi_{n,m}$, si dia una combinazione lineare qualunque, a coefficienti costanti di φ e di varie $\Phi_{n,m}$. S'intende che in questa combinazione lineare le n ed m debbano essere, però, o tutti interi o tutti metà di interi dispari, ed, in quest'ultima ipotesi, anche $n \geq m$.

Mineralogia. — *Sulla presenza della monazite nelle sabbie e nelle arenarie della Somalia meridionale.* Nota del Corrispondente Ettore Artini.

Ho avuto occasione, in questi ultimi tempi, di esaminare dal punto di vista mineralogico numerosi campioni di sabbie e di arenarie della Somalia italiana; questo materiale mi fu gentilmente favorito per lo studio dal dott. G. Stefanini, il quale ebbe a raccoglierlo nel 1913, durante il viaggio della missione scientifica inviata dal R. Governo in tale regione. I risultati particolareggiati delle mie ricerche saranno altrove pubblicati; mi sia concesso qui di accennare soltanto, in via sommaria e preliminare, al ritrovamento di un minerale d'un certo interesse, la *monazite*, sia nelle alluvioni del Giuba, sia nelle arenarie antiche della regione interna (Lugh).

Fin dallo scorso anno ebbi modo di rilevare l'esistenza di rarissimi granuli d'un minerale i cui caratteri mi sembravano quelli della monazite, nelle sabbie del Deserto Arabico, e nella formazione arenacea nota sotto il nome di *Nubian Sandstone* (1). Ma la eccessiva rarità del minerale avendo impedito una ricerca approfondita, la determinazione era rimasta alquanto dubbia e malsicura.

Lo stesso minerale, con caratteri perfettamente simili, ho potuto ora ritrovare nelle sabbie del Giuba. Si tratta di granuletti del diametro ordinariamente non superiore a 0.10 mm., rotondeggianti, ciottoliformi, i quali anche per tale aspetto della superficie si differenziano abbastanza bene dai cristallini di zircone delle stesse dimensioni i quali, nelle medesime sabbie, si presentano con facce nitide e con spigoli vivi. Il colore è gialliccio, talora giallo citrino chiarissimo, più spesso giallo puro assai pallido, passando anche a giallo miele; frequenti vi sono piccole chiazze ocracee, dovute ad incrostazione, sia negli incavi della superficie, sia nelle screpolature. I caratteri morfologici esterni, in buona parte secondarî, insieme al colore, impartiscono al nostro minerale una fisonomia propria, ben riconoscibile, e affatto simile, per non dire identica, a quella della monazite delle sabbie brasiliane.

Il pleocroismo è debolissimo, quasi insensibile; il potere rifrangente molto elevato, tanto che nel joduro di metilene si constata essere $\alpha \gg n$. La birifrazione è fortissima, e all'incirca si può stimare $\gamma - \alpha = 0{,}05$; l'angolo degli A. O. è piccolissimo, più ancora che nelle monaziti d'altre provenienze, così che la figura di interferenza a luce convergente, se non è esattamente

(1) E. Artini, *Sulla composizione mineralogica di alcune sabbie del Deserto Arabico.* Atti Soc. ital. sc. nat., an. 1914, LIII, pag. 372.

centrata, può talora apparire quasi uniassica; il carattere ottico è positivo; a dispersione degli A. O. poco sensibile.

Questi caratteri, escludendo da una parte lo zircone e dall'altra l'epidoto, rendono certo assai verosimile la natura monazitica dei rari granuletti, ma non sono sufficienti ad assicurarne la diagnosi; per questa occorreva un esame chimico, il quale nelle alluvioni normali del Giuba, come nelle sabbie del Deserto Arabico, è ostacolato dalla impossibilità pratica di isolarne una quantità sufficiente. Ma ciò che nelle sabbie comuni non si poteva fare, mi riuscì perfettamente col trattamento di una speciale sabbia nera magnetica, raccolta dal dott. Stefanini presso Giumbo, alla foce del Giuba.

È questa una delle solite sabbie nere, ottenute per naturale concentrazione degli elementi pesanti, concentrazione spinta fino ad eliminare quasi tutto il quarzo e la maggior parte dei silicati; nel caso nostro il processo è arrivato a tal punto che il p. sp. della sabbia, presa così come fu raccolta, determinato sopra un campione di 100 grammi mediante il volumenometro di Schumann, raggiunse il valore di 4,90. Nera in massa, e ricchissima sopra tutto di magnetite e di ilmenite, che ne formano la parte principale, questa sabbia, sottoposta ad analisi chimica complessiva, coi soliti metodi, diede i seguenti risultati:

$$56{,}09\ \%\ \text{di Fe, pari a } 80{,}13\ \%\ \text{di } Fe_2O_3,$$
$$\text{e } 16{,}87\ \%\ Ti\,O_2.$$

Queste percentuali ricordano molto da presso quelle di Fe_2O_3 e di $Ti\,O_2$ delle spinelliti titanomagnetitiche della Norvegia.

Per quanto ha riguardo alla composizione mineralogica, questa sabbia oltre agli ossidi di ferro, prevalenti, contiene: — *quarzo, augite, granato almandino, zircone, epidoto* — scarsi; — *spinello verde, ortoclasio e microclino, pirosseno rombico, orneblenda verde, cianite, tormalina, staurolite, titanite, apatite,* e la presunta *monazite* — tutti scarsissimi o rari.

Ad una separazione della monazite con mezzi meccanici, o soluzioni pesanti, non era il caso di pensare, avendo essa un p. sp. troppo alto, e troppo poco diverso da quello degli ossidi di ferro; evidente si presentava invece la opportunità di una separazione magnetica. A tale scopo mi servii di una elettrocalamita sul tipo di quella consigliata da Rosenbusch, ma di maggior potenza, utilizzando come sorgente di energia non già una batteria di pile Grenet, ma la corrente alternata stradale, abbassandone la tensione a 50 volts con un piccolo trasformatore, e raddrizzandola con una batteria di celle elettrolitiche. L'apparecchio, costruito dietro le mie indicazioni dalla nota Ditta Campostano, della nostra città, si mostrò subito, sia per la considerevole potenza, sia per la facile regolabilità, egregiamente adatto allo scopo. Facilissimo mi fu infatti estrarre interamente gli ossidi di ferro, data la loro enorme suscettività magnetica (I^a porzione); e nel residuo pure agevolmente riuscii

a separare i minerali con debole suscettività positiva (II^a porzione) da quelli non magnetici, come quarzo, rutilo, zircone, titanite e apatite (III^a porzione). Più delicato fu il trattamento da far subire alla II porzione, la sola che a me interessasse, perchè costituita da granato, pirosseni, anfiboli, epidoto, tormalina e monazite. Con opportuna regolazione, sia mediante reostato, sia variando la distanza fra le due espansioni polari, mi fu possibile, con successive separazioni frazionate, profittare della minore suscettività magnetica della monazite in confronto con gli altri minerali citati, per concentrarla in modo da ottenere, col trattamento di circa 500 gr. di sabbia nera, quasi 0,3 gr. di una sabbiettina gialla, certo non composta di monazite pura, ma formata in grandissima prevalenza da questo minerale.

Potei così constatare che il suo p. sp. è superiore a quello del joduro di metilene, nel quale va a fondo rapidamente, e sopra tutto potei procurarmi per via chimica la riprova della determinazione specifica. Per ciò, la porzioncina contenente la monazite, salvo una piccola parte conservata per confronto, fu trattata per molte ore con HCl concentrato a dolce calore. Nel residuo, lavato con acqua e seccato, già ad occhio nudo si constata che il minerale giallo ritenuto monazite ha perduto la vivacità della tinta e la lucentezza, mostrandosi sbiancato ed opaco. Al microscopio, in essenza di garofani, si riconosce all'evidenza la corrosione profonda subita dal nostro minerale, il cui contegno fa così chiaro contrasto con quello dei pochi epidoti che vi sono frammisti, i quali sono invece rimasti intatti, con forme nitide e spigoli vivi. L'attacco è però alquanto ineguale; alcuni granuli sono più ed altri meno profondamente corrosi, e spesso uno stesso individuo in una parte si mostra profondamente cariato, mentre in altra è appena corroso superficialmente: fenomeni tutti identici a quelli che potei osservare nella monazite del Brasile, similmente trattata a scopo di confronto.

Della soluzione, filtrata, qualche goccia lasciata cadere nel reattivo molibdico dà subito assai chiaramente la reazione di P_2O_5. Il resto della soluzione cloridrica fu tirato a secco a bagno maria, ripreso con acqua distillata, riacidificando con qualche goccia di HCl, e nuovamente filtrato. Una goccia di questo liquido, diluita con alcune gocce d'acqua, dà con acido ossalico evidente la reazione microchimica caratteristica del Ce: un precipitato pulverulento finissimo, che rapidamente si trasforma in cristallini aghiformi, riuniti in croci od in stellette a sei raggi con estremità biforcute, le quali, procedendo la evaporazione, crescono ramificandosi in eleganti arborescenze raggiato-divergenti; la estinzione dei singoli individui è parallela all'allungamento, e questo è otticamente positivo.

Era così dimostrato trattarsi realmente di monazite; ma avendo a mia disposizione ancora la più gran parte della soluzione, potei sottoporla ad un'analisi meno incompleta. A tale scopo la soluzione, fortemente acidificata con HCl, fu versata, goccia a goccia, in un eccesso di soluzione diluita di

acido ossalico, e fatta bollire per qualche momento; dopo raffreddamento, sul fondo del bicchierino si osservava un precipitato bianco, formato da quei leggeri e soffici fiocchetti di aghi finissimi, che sono così caratteristici per gli ossalati dei metalli delle terre rare, e in ispecie del Ce. Raccolto il precipitato sul filtro, e ben lavato, esso fu calcinato in crogiolino di porcellana, e poi facilmente ridisciolto in acido nitrico diluito, previa aggiunta di qualche goccia d'alcool. Evaporato a dolcissimo calore l'eccesso d'acido, e ripreso con acqua il residuo bianco, cristallino, tale soluzione fu analizzata secondo Duparc e Monnier (1), e lasciò riconoscere la presenza di tracce di torio e notevole quantità di cerio. Data la scarsità del materiale, e le perdite inevitabili nel lungo e delicato procedimento, stimai non fosse necessario proseguire tentando il riconoscimento singolo di La, Pr e Nd, che si può supporre accompagnino il Ce. Ricondussi invece il perossido bruno ottenuto con H_2O_2 allo stato di nitrato, previa riduzione, e tentai la reazione di Sonnenschein, con soda caustica e solfato di stricnina: il risultato fu positivo, nitido e sicuro.

Non resta ora che ricercare la provenienza della monazite delle sabbie del Giuba. Io non posso certamente escludere in modo assoluto che il raro minerale derivi da quelle granititi che qua e là, come isole, emergono nell'interno della regione somala, dalla vasta coperta delle rocce detritiche, eoliche od alluvionali; ma devo confessare che questa origine diretta mi sembra poco probabile. Già nella succitata mia Nota intorno alle sabbie del Deserto Arabico credetti poter indicare come fonte presumibile della monazite nelle sabbie desertiche quella formazione arenacea ch'è designata ordinariamente come *Nubian Sandstone*. Anche nella regione somala, in varie località dell'interno (Curetka, Scidle, Passo di Marilè) affiora un complesso di rocce arenacee, conosciute sotto il nome di *arenarie di Lugh*, le quali, benchè cronologicamente siano dai geologi riferite a tutt'altro periodo, presentano con l'arenaria nubiana non solo una grandissima analogia d'aspetto, ma anche una rassomiglianza così grande, che potrebbe dirsi identità, nei riguardi della composizione mineralogica.

Fra i caratteri comuni alle due serie di rocce noteremo qui solo: la grande copia del quarzo, e la eccezionale scarsezza dei minerali pesanti: la costante ed assoluta mancanza di pirosseni ed anfiboli; la prevalenza tra gli elementi colorati della tormalina, ch'è invece affatto scarsa e subordinata nelle sabbie d'alluvione o desertiche delle due regioni; e, posso aggiungere anche, la presenza in entrambe di quantità estremamente esigue di monazite, in granuletti delle stesse dimensioni e dell'identico aspetto che presentano quelli sopra descritti, delle sabbie del Giuba. Sarei pertanto disposto a ritenere probabile che nelle arenarie della formazione di Lugh debba ricercarsi l'origine della monazite del Giuba, così come ritengo che nell'arenaria nubiana stia la fonte della monazite osservata nelle sabbie del Deserto Arabico.

(1) L. Duparc et A. Monnier., *Traité de technique minéralogique et pétrographique*. IIe partie. Tome 1. *Les méthodes chimiques qualitatives*. Leipzig, 1913, pag. 201.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota VI: *Il fenomeno dell'addizione di due contrazioni successive indagato nel preparato diaframmatico*, del Corrispondente F. Bottazzi.

L'addizione di due contrazioni provocate mediante due stimoli unici eguali, succedentisi a breve intervallo, è considerata come il processo fondamentale del tetano. Il fenomeno fu prima studiato da Helmholtz (1), il quale ne formulò anche la legge, che però fu in seguito modificata, quasi simultaneamente, da Kronecker e Stanley Hall (2) e da Sewall (3). Sullo stesso argomento, ricerche molto accurate fecero poi von Kries (4), von Frey (5), Wolff (6), Scheck (7) e Ishihara (8).

Del fenomeno in questione sono da considerarsi particolarmente i seguenti tre caratteri: 1°) il valore dell'addizione, cioè l'altezza a cui si eleva l'apice della curva addizionata (o della « coppia », come potrebbe brevemente dirsi l'insieme delle due curve); 2°) la velocità con cui questa si svolge rispetto alla prima, cioè la ripidezza con cui monta il tratto ascendente della rispettiva curva; 3°) il grado di fusione delle due curve, che aumenta col diminuire dell'intervallo fra i due stimoli. Mentre il primo carattere determina l'altezza del tetano, dal terzo dipende se il tetano è incompleto o completo. Al decorso ascendente della curva tetanica, che ha la forma di una iperbole equilatera (Bohr, 16a), contribuisce poi la contrattura.

Molti fattori influiscono sul fenomeno dell'addizione.

Elevando la *temperatura*, ordinariamente cresce tanto l'altezza delle contrazioni cloniche, quanto quella delle coppie, sia l'intervallo fra i due stimoli grande (per es. di 0.175″, come nell'esper. VIII, fig. 1), o piccolo (0.055″, nello stesso esperimento). Le temperature relativamente basse promuovono la contrazione tonica (ved. Nota V); ma siccome esse deprimono la contrazione clonica, non agevolano il fenomeno dell'addizione, per quanto questo ne dipende (ved. Ishihara, 8).

Rispetto all'*intensità degli stimoli*, spesso si osserva che la contrazione addizionata è più alta della precedente, più quando gli stimoli sono submassimali che non quando sono massimali o, peggio, ultramassimali; probabilmente perchè questi ultimi provocano già contrazioni uniche molto più alte (massimali) di quelle che provocano gli stimoli submassimali. Ma gli stimoli forti sviluppano la contrazione tonica (ved. Nota V). Si comprende, quindi, che, quando ciò avviene, il fenomeno di addizione in periodo di decremento è notevolmente agevolato dagli stimoli forti, come ho potuto constatare in

varii casi. L'influenza della intensità degli stimoli è quindi connessa con la frequenza di essi e con la disposizione del muscolo a eseguire contrazioni toniche più o meno gagliarde.

L'influenza del *peso* o della *tensione* è grandissima. Se il muscolo è scarico o minimamente caricato, l'addizione o manca o è di minimo valore. Poichè il peso o la tensione sviluppano la contrazione tonica (ved. Nota V), la loro efficacia si fa sentire principalmente sull'addizione in periodo di decremento. La mancanza di addizione nel muscolo scarico dipende, almeno in parte, dal fatto che questo fa di solito contrazioni cloniche più alte di quelle

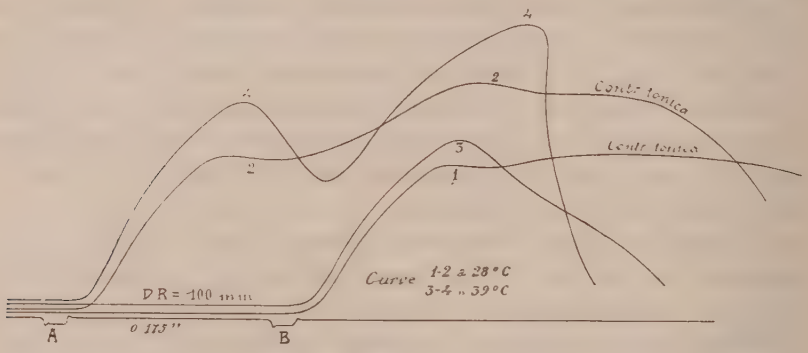


Fig. 1

Questa e le seguenti figure sono riduzioni fotografiche a $^1/_3$ dalle curve originali. A e B indicano i due stimoli: quando l'intervallo fra essi diminuisce progressivamente, B si avvicina mano mano ad A. DR significa: distanza frá i rocchetti dell'induttorio, in mm.

del muscolo caricato (ved. fig. 2). Le contrazioni del muscolo scarico presentano un periodo di decremento più o meno prolungato, che a torto von Frey (52) considerò come dovuto a contrazione tonica (« Kontraktur »), là dove è invece da spiegarsi con la mancanza di un peso atto a sollecitare l'allungamento del muscolo. Nell'esper. X (fig. 2), aumentando il peso da 3 a 10 e poi a 20 gr., si accentua (col peso di 20 gr.) la contrazione tonica e aumenta il valore dell'addizione fino al punto che, raggiunto un intervallo *optimum*, l'altezza della contrazione addizionata diventa doppia di quella della contrazione unica. Ma se col peso di 20 gr. si raggiunge il massimo dell'addizione, l'altezza assoluta e della contrazione unica e della coppia è assai minore che non col peso di 10 gr.

L'*intervallo fra i due stimoli*, cioè la frequenza di questi (stimoli d'intensità notevole, ma non massimali; temperatura conveniente), è un fattore fondamentale dell'addizione. Distinguiamo l'addizione in periodo d'incremento o di decremento, secondo che lo stimolo addizionale colpisce il muscolo avanti o dopo l'apice della prima contrazione. Nell'esper. VI, finchè

il muscolo fu eccitato con stimoli submassimali (DR = 200 mm) e non presentò contrazione tonica, l'altezza della coppia aumentò col diminuire dell'intervallo fra i due stimoli, fino a raggiungere circa il doppio dell'altezza della prima contrazione (fig. 3); ma poi, fatta aumentare l'intensità degli stimoli (DR = 100 mm), la prima contrazione raggiunse un'altezza superiore a quella delle più alte coppie precedenti, e quindi il valoro dell'addizione fu assai minore, qualunque fosse l'intervallo fra i due stimoli (fig. 4). Ciò risulta evidentemente dalla seguente tabella, oltre che dalle figg. 3 e 4:

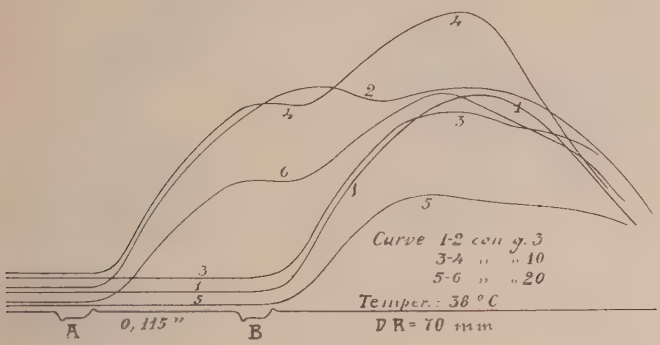


FIG 2

ESPERIENZA VI (6 giugno 1914):

Preparato diaframmatico di cane.

A. DR = 200 mm. Altezza della prima contrazione, in media = 36 mm.			**B.** DR = 100 mm. Altezza della prima contrazione, in media = 105 mm.			
N.	Intervallo fra i due stimoli	Altezza della coppia	N.	Intervallo fra i due stimoli	Altezza della coppia	
1	0,190″	mm. 39	11	0,200″	mm. 124	
2	0,170	„ 40	12	0,170	„ 127	
3	0,140	„ 51	13	0,140	„ 124	
4	0,120	„ 51,5	14	0,120	„ 114	
5	0,080	„ 60	15	0,085	„ 120	
6	0,055	„ 62	16	0,055	„ 126	?
7	0,040	„ 71	17	0,025	„ 125	
8	0,025	„ 75				

N. B. In questa e nelle seguenti tabelle, il punto interrogativo significa che l'altezza delle curve nei tracciati originali non potette esser misurata con assoluta precisione.

Nella serie di contrazioni addizionate provocate da stimoli forti, si manifestò il fenomeno, già osservato da von Frey ([5c]), che cioè, entro certi

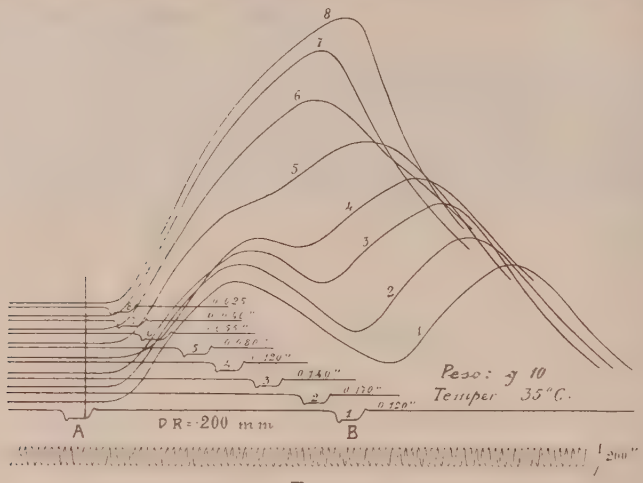


Fig. 3

limiti dell'intervallo fra i due stimoli (0,120″-0,085″), la seconda contra-

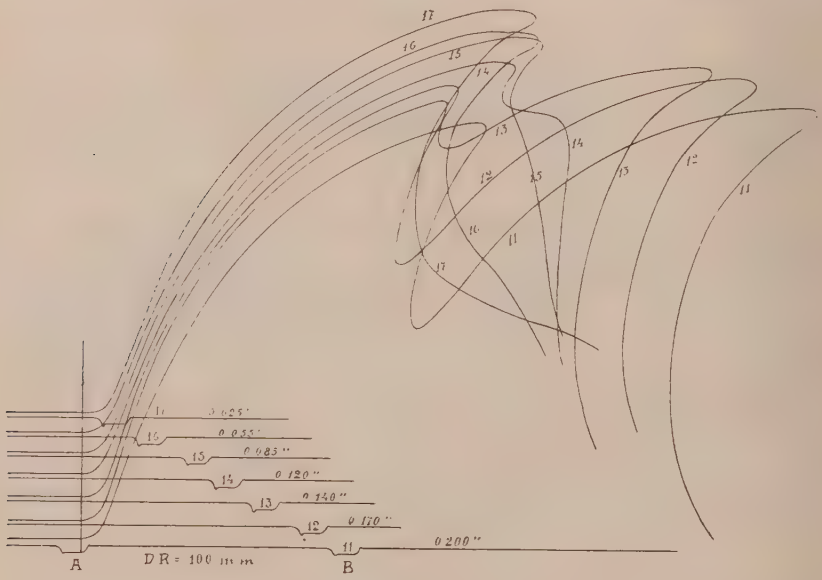


Fig. 4

zione fu meno alta della prima, mentre incominciò ad apparire una mediocre contrazione tonica. Si direbbe che la contrazione addizionale fosse inibita.

Ma tale fenomeno si manifestò più evidente nell'esper. V, come risulta dalla seguente tabella e dalla fig. 5. Finchè l'intervallo fra gli stimoli fu rela-

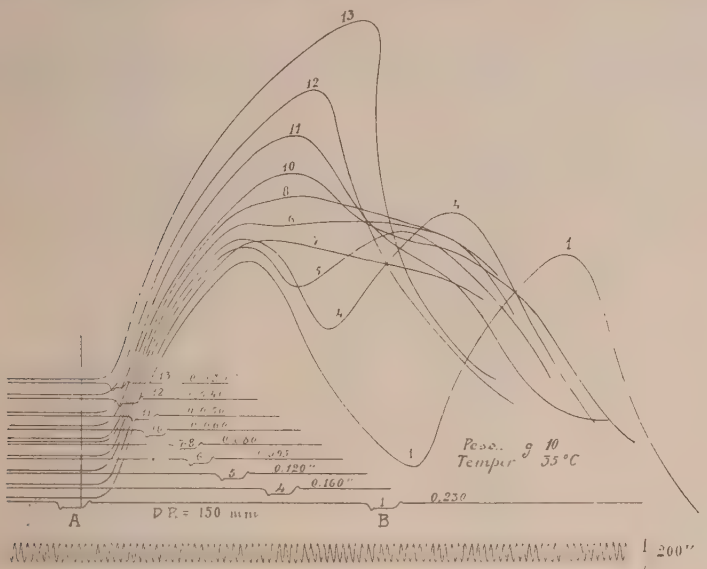


FIG. 5

tivamente grande (0,230 - 0,120"), l'addizione in decremento aumentò col

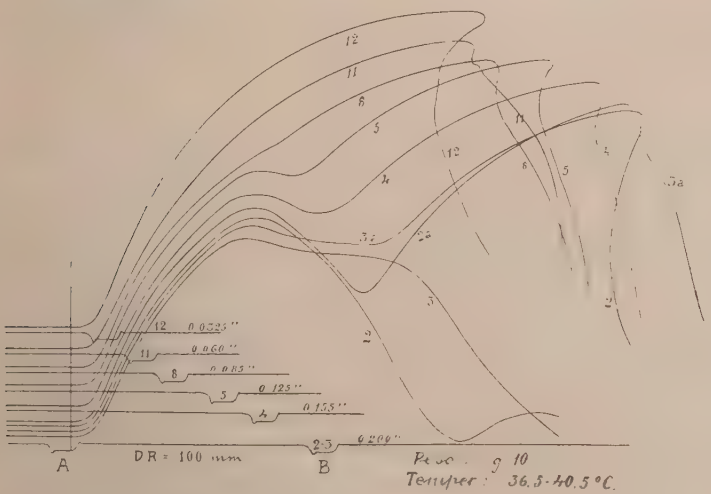


FIG. 6

diminuire di esso (curve 1, 4 e 5); ma come il secondo stimolo incominciò a colpire il muscolo in prossimità dell'apice della prima contrazione, l'addi-

zione scemò (curve 6 e 7), mentre incominciò a manifestarsi, in luogo della contrazione clonica addizionale, una sempre più cospicua contrazione tonica. All'intervallo 0,080″ (curva 8), tornò ad aumentare la contrazione addizionale, che poi crebbe fino a raggiungere il massimo di altezza all'intervallo 0,030″ (vale a dire, in periodo d'incremento); la contrazione tonica, invece, incominciò allora a diminuire, fin quasi a scomparire dalla coppia più alta registrata.

Esperienza V (3 giugno 1914):
Preparato frenico-diaframmatico di cane.

N.	Intervallo fra i due stimoli	Altezza della prima contrazione (1)	Altezza della coppia (2)	Differenza fra (1) e (2)	*Osservazioni*
1 (II)	0,230″	mm. 49	—	—	Niuna contrazione tonica.
2 (X)	0,230	57	mm. 66	mm. 9	Lievissima contr. tonica.
3 (XI)	0,230	55	66	11	» » »
4 (XIV)	0,160	59	72	13	Non contr. tonica.
5 (XIII)	0,120	56	67	11	Contr. tonica sulla coppia.
6 (VII)	0,095	58	61	3	Lieve addizione.
7 (I)	0,080	54	54	0	Nessuna addizione.
8 (XII)	0,080	59	63	4	» »
9 (VI)	0,080	—	62,5	—	Cospicua contr. tonica.
10 (V)	0,060	—	63	—	Fusione completa.
11 (IV)	0,050	—	72	—	» »
12 (III)	0,040	—	76	—	» »
13 (VIII)	0,030	—	89	—	» »
14 (IX)	0,030	—	88	—	» »

N. B. I numeri romani indicano l'ordine con cui i gruppi di curve furono registrati, in questa come anche nella seguente tabella.

Sembra, dunque, che: 1) in un muscolo non molto disposto a eseguire contrazione tonica, questa apparisce quando agiscono due (*a fortiori*, più) stimoli successivi, a breve intervallo; 2) la contrazione tonica apparisce e si accentua entro certi limiti dell'intervallo fra i due stimoli; 3) in simili casi, finchè esiste una contrazione tonica cospicua, la contrazione clonica addizionale è come inibita. Il fenomeno è di difficile interpretazione.

L'addizione di due contrazioni (cloniche) successive in periodo d'incremento può essere determinata da più cause. Dobbiamo rammentare, a questo proposito, l' « autosostenimento » o « sostenimento interno », vale a dire quella condizione per cui il muscolo, al momento in cui inizia la contra-

zione addizionale, trova il peso già sostenuto alla corrispondente altezza dalla contrazione precedente. Già von Kries ([4]) e von Frey ([5]) dimostrarono che, quando il peso è artificialmente sostenuto, le contrazioni aumentano successivamente di altezza a misura che il muscolo si carica più tardi dopo l'inizio di ciascuna di esse, fino a raggiungere, o quasi ([9]), l'altezza del tetano.

Ma l'addizione in periodo d'incremento non può essere effetto esclusivo del sostenimento interno. Un altro fattore fondamentale è il seguente. Supponendo che il muscolo si allunghi quando ne scomparisce l'acido lattico, che è causa dell'accorciamento, se il muscolo è colpito dal secondo stimolo

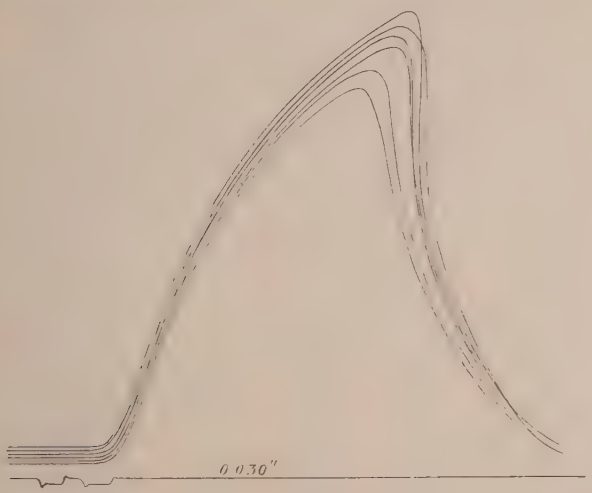


Fig. 7

prima che l'acido, formatosi per effetto dello stimolo precedente, ne sia del tutto scomparso, esso eseguirà una contrazione addizionale. E si può anche ammettere che l'eccitamento addizionale subisca una intensificazione (accelerazione) sotto l'influenza di qualcuno dei prodotti della reazione provocata nel muscolo dal primo stimolo, per es. dello stesso acido lattico [Ranke ([10]), Sewall ([3]), Brailsford Robertson ([11]), Mines ([9])], che catalizzerebbe la seconda reazione. Da ciò dipende il « fenomeno della scala », che può osservarsi anche in una serie di « coppie », come dimostra la fig. 7. Nell'addizione di due o più contrazioni successive, questo fattore deve agire tanto più efficacemente, in quanto che la seconda reazione succede alla prima dopo un intervallo molto minore che non nell'ordinario fenomeno della « scala », quando cioè la concentrazione del catalizzatore è maggiore. Col tempo, il catalizzatore sparisce, e quindi il fenomeno della « scala » si attenua, fino a dileguarsi del tutto quando la frequenza degli stimoli diminuisce oltre un certo limite.

Per quanto riguarda poi l'addizione in periodo di decremento, non può dubitarsi che essa, più che dal fattore ora detto, dipende dalla presenza di una cospicua *contrazione tonica*, che fa da sostegno interno alla contrazione clonica addizionale. Di fatto, in simili casi, l'altezza massima della « coppia » si può già ottenere quando ancòra l'intervallo fra i due stimoli è assai grande, vale a dire quando il secondo stimolo colpisce il muscolo assai dopo l'apice della prima contrazione; e può non aumentare col diminuire di esso, come risulta dalla seguente tabella e dalle curve della fig. 6. registrate nell'esperimento IX:

Esperienza IX: 14 luglio 1914.
Preparato diaframmatico di cane giovanissimo.

N.	Intervallo fra i due stimoli	Altezza della prima contrazione (1)	Altezza della seconda contrazione (2)	Altezza della coppia (3)	Differenza fra (3) e (1) o (2)	*Temperature e osservazioni*
1 (X)	0,200″	mm. 54	mm. 59	mm. 88	mm. 34	40,5° C.
2 (IX)	0,200	62	60	91(?)	32	40,5° C.
3 (VIII)	0,200	59	56	89	33	36,5° C; c. ton.
4 (XII)	0,155	61	62,5	91	30	36,5° C; c. ton.
5 (VI)	0,125	62	59,5	91,5	32	37,5° C; c. ton.
6 (V)	0,125	*72,5*	*69*	*87*	*14,5*	37,5° C.
7 (I)	0,085	60	58	86	27	37° C.
8 (II)	0,085	61	58,5	86,5	28	38° C.
9 (III)	0,0825	*71*	*70,5*	*85*	*14,5*	37,5° C; fusione.
10 (IV)	0,060	—	*69*	*85*	*16*	37,5° C; fusione.
11 (XI)	0,060	76(?)	62,5	86,5	24	40° C; fusione.
12 (XII)	0,0325	—	—	88	—	40° C; fusione.

N. B. I numeri stampati in corsivo corrispondono alle contrazioni del muscolo caricato con 4 g., gli altri a quelle del muscolo caricato con 10 g. Solo queste ultime sono state riprodotte nella fig. 6.

Anche nell'esper. III (18 maggio 1914), l'altezza della « coppia » raggiunse il massimo valore (mm. 108) in due momenti differentissimi: nel muscolo fresco stimolato con intervallo di 0,055″, mentre le contrazioni non presentavano traccia di contrazione tonica; e più tardi, dopo la comparsa di una forte contrazione tonica, l'intervallo fra i due stimoli essendo di 0,120″.

Interpretando le « oscillazioni del tono », descritte da Fano ([12]), come contrazioni (lente) della muscolatura liscia dell'atrio cardiaco di *Emys*

europaea, io ho spiegato ([13]) la maggiore altezza che le sistoli atriali raggiungono verso l'apice di ciascuna oscillazione, ammettendo che la contrazione tonica della muscolatura liscia fa da « sostegno interno » alle contrazioni rapide (sistoli) della muscolatura striata. Certo è che le « oscillazioni del tono », in alcuni casi, presentano una singolare rassomiglianza con le serie di « contrazioni sostenute » del von Frey. Ora, mentre in queste il sostenimento è esterno, nelle « oscillazioni del tono » è interno, ma dovuto all'azione di un tessuto muscolare distinto da quello le cui contrazioni se ne giovano per aumentare di altezza; e nelle contrazioni addizionate, specie in periodo di decremento, dei muscoli striati, il sostenimento è pure interno, ma dovuto, non già a una specie diversa di tessuto, bensì a una sostanza contrattile diversa delle stesse fibre muscolari, al sarcoplasma, la cui contrazione tonica fa da sostegno alla contrazione successiva. Se durante il periodo d'incremento l'« autosostenimento » può esser fatto, in parte diversa secondo i casi, tanto dalla contrazione clonica quanto dalla tonica, è specialmente nell'addizione in periodo di decremento che risulta evidente l'azione di sostenimento della contrazione tonica.

Questa azione, del resto, si manifesta, comunque la contrazione tonica o la contrattura sia provocata. Infatti, le contrazioni rapide provocate con stimoli unici in un muscolo contratturato dalla veratrina o da acidi, da alcali, dall'ammoniaca ecc., sono sempre molto più alte di quelle provocate dagli stessi stimoli prima della contrattura.

Dalle ricerche di von Kries ([4c]) e di von Frey ([5c]) risulta che tanto le contrazioni « sostenute », quanto quelle addizionate, si svolgono più velocemente delle contrazioni uniche ordinarie (come si può scorgere anche in alcune delle curve qui riprodotte), onde si verifica il fenomeno che quegli autori chiamarono « anticipazione dell'apice » (Verfrühung des Gipfels). Anche questo fenomeno dipende probabilmente, in parte, dall'influenza acceleratrice che la prima reazione esercita sullo svolgimento della successiva. Ma nelle contrazioni solamente « sostenute » artificialmente, tale influenza non si verifica, onde essa non può essere invocata a spiegare la « anticipazione dell'apice ». In che modo il sostenimento esterno operi tale anticipazione, nè quegli autori dissero, nè io sono in grado di spiegare.

Da tutti i miei esperimenti risulta, in accordo con le osservazioni di Sewall ([3]) e di altri, che la perfetta fusione delle due contrazioni nella « coppia » esige una frequenza dei rispettivi stimoli sempre e notevolmente maggiore di quella che è sufficiente a produrre la massima addizione, specialmente quando a determinare l'addizione contribuisce la contrazione tonica, cioè nelle addizioni in periodo di decremento.

Risultati analoghi a quelli sopra descritti ho ottenuto stimolando il nervo, in vece del muscolo, del preparato frenico-diaframmatico. Ma la relativamente rapida alterazione delle giunzioni neuro-muscolari mi ha ob-

bligato a sperimentare principalmente su preparati muscolari già divenuti ineccitabili per mezzo del nervo, e a tener conto, in questo lavoro, solamente dei risultati così ottenuti.

In conclusione, molti e svariati sono i fattori che determinano l'altezza e il grado di fusione delle « coppie » (e, quindi, anche dei tetani). Alcuni agiscono agevolando il fenomeno di addizione: la frequenza e l'intensità degli stimoli; la temperatura (entro certi limiti); il peso o la tensione; l'autosostenimento; l'influenza acceleratrice (aumentatrice) che esercita qualcuno dei prodotti della reazione intramuscolare sulle reazioni (contrazioni) successive; la contrazione tonica, specie nell'addizione in periodo di decremento ecc. Altri tendono a inibirlo: la fatica (che si può evitare, più nei muscoli di animali pecilotermi, facendo esperimenti di breve durata e provocando il minor numero possibile di contrazioni in muscoli freschissimi conservati nelle migliori condizioni di sopravvivenza); il fenomeno descritto da Buckmaster ([14]) col nome di « einleitende Zuckungen », per cui in una serie di contrazioni iniziali la seconda contrazione è meno alta della prima, la terza della seconda ecc., e che von Frey ([5c]) considerò come una progressiva « Anpassung oder Einstellung der Muskelarbeit auf ein bestimmtes Reizintervall »; e finalmente quella inesplicata inibizione della contrazione clonica addizionale, di cui sopra ho parlato.

Poichè tanti e di natura sì svariata e sì intimamente fra loro connessi sono i fattori che entrano in azione nel fenomeno in esame, si comprende come l'*optimum* dell'addizione (e del tetano), per quanto riguarda l'altezza e la fusione delle contrazioni componenti, si raggiunga solamente quando i detti fattori cooperano tutti armonicamente a produrlo, e come, di conseguenza, sia difficilissimo il formulare una legge che descriva in modo soddisfacente, cioè senza lacune, il fenomeno dell'addizione e del tetano.

Una cosa è certa, però: e cioè, che la contrazione tonica, operando l'autosostenimento, contribuisce moltissimo a produrre l'addizione, specie durante il periodo di decremento, vale a dire con stimoli di frequenza relativamente piccola. Così solamente si può spiegare, per es., come i muscoli, nei quali è maggiormente sviluppata la disposizione alla contrazione tonica (muscoli rossi), sono capaci di eseguire tetani altissimi e completi, anche con stimoli di frequenza relativamente piccola ([15]).

BIBLIOGRAFIA.

([1]) H. Helmholtz, Monatsber. d. Berliner Akad. d. Wiss., 1854, pag. 328.

([2]) H. Kronecker und G. Stanley Hall, *Die willkürliche Muskelaction.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1879, pag. 13.

([3]) H. Sewall, *On the effect of two succeeding stimuli upon muscular contraction.* Journ. of physiol. 2, pag. 164 (1879-80).

([4]) *a*, J. von Kries, *Untersuchungen zur Mechanik des quergestreiften Muskels.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1880, pag. 348; *b*, idem., Berichte d. naturforsch. Ges. zu

Freiburg i. Br. 2 (1886); *c*, idem., *Untersuchungen* etc. *Dritte Mittheilung: Ueber den zeitlichen Verlauf summirter Zuckungen.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1888, pag. 537.

(5) *a*, M. von Frey, *Reizungsversuche am unbelasteten Muskel.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1887, pag. 195; *b*, idem, *Versuche zur Auflösung der tetanischen Muskelcurve.* Beiträge zur Physiologie C. Ludwig gewidmet (Leipzig. 1887); *c*, idem., *Ueber zusammengesetzte Muskelzuckungen.* Archiv. f. (Anat. u.) Physiol., 1888, pag. 213.

(6) L. Wolff, *Versuche über Doppelreizung bei isometrischer Muskelthätigkeit.* Diss., Würzburg 1889.

(7) F. Schenck, *Beiträge zur Lehre von der Summation der Zuckungen.* I. Pflüger's Arch. 96, pag. 399 (1903).

(8) M. Ishihara, *Ueber Zuckungssummation bei Krötenmuskeln und bei abgekühlten und erwärmten Froschmuskeln.* Pflüger's Arch. 111, pag. 567 (1906).

(9) G. R. Mines, *On the summation of contractions.* Journ. of physiol. 46, pag. 1 (1913). [L'A. crede che i tetani, coi quali von Frey paragonava le sue contrazioni « sostenute », non fossero massimali].

(10) J. Ranke, *Tetanus: eine physiologische Studie.* Leipzig, 1865.

(11) F. Brailsford Robertson, *On the biochemical relationship between the « staircase » phenomenon and fatigue.* Bioch. Zeit. 2, pag. 287 (1908).

(12) G. Fano, *Ueber die Tonusschwankungen der Atrien des Herzens von « Emys europaea ».* Beitr. zur Physiologie C. Ludwig gewidmet, pag. 287. Leipzig, 1887.

(13) Fil. Bottazzi, *Ricerche sulla musculatura cardiale dell' « Emys europaea ».* Zeit. f. allg. Physiol. 6, pag. 140 (1906).

(14) G. A. Buckmaster, *Ueber eine neue Beziehung zwischen Zuckung und Tetanus.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1886, pag. 459.

(15) Fil. Bottazzi, *Ricerche sulla genesi del tetano musculare.* Atti della Soc. lig. di scienze nat. e geogr. 15 (1904). [Arch. ital. de biol. 42, pag. 169 (1904)].

(16) Ved. anche: *a*, Chr. Bohr, *Ueber den Einfluss der tetanisirenden Irritamente auf Form und Grösse der Tetanuscurve.* Arch. f. (Anat. und) Physiol. 1882, pag. 233; *b*, F. B. Hoffmann, *Studien über den Tetanus.* [Pflüger's Arch. 93, pag. 186 (1902); 95, pag. 484 (1903); 103, pag. 291 (1904)].

Meccanica celeste. — *Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno.* Nota preliminare di G. Armellini, presentata dal Corrispondente E. Almansi.

1. Il satellite di Nettuno, come è noto, fu scoperto a Starfield, presso Liverpool, nell'agosto 1847, dall' astronomo Lassell, il quale si servì di un riflettore newtoniano di m. 0,61 di apertura e di m. 6,15 di distanza focale. L'ingrandimento adoperato era da 205 a 370 volte (1).

Il satellite fu successivamente osservato, nel settembre dello stesso anno, da Otto Struve a Poulkowo, e quindi da Bond a Cambridge negli Stati Uniti (2).

(1) F. Arago, « *Astronomie* », tom. IV, pag. 526.

(2) Sopra le osservazioni del Bond si vedano i « *Procedings of the american Academy*, II, 1847-1848.

Più tardi, nel 1852, lo stesso Lassell fece a Malta una seconda serie di osservazioni, le quali servirono a completare le prime e ad assegnare in modo approssimato gli elementi dell'orbita (1).

Anche Otto Struve tornò a completare le sue prime osservazioni del 1847-48, istituendone una seconda serie nel 1871-72, e più tardi una terza nel 1873-76. Abbiamo poi quattro serie di osservazioni dell'astronomo A. Marth, eseguite le prime a Malta nel 1852 e nel 1864; le altre a Washington nel 1873 e nel 1883.

Gran parte di questo enorme materiale scientifico (escluse naturalmente le osservazioni posteriori al '73) fu accuratamente discusso da Simon Newcomb, in una elaborata Memoria (2) nella quale egli riporta anche alcune osservazioni fatte da lui stesso, a Washington, nella opposizione del 1873.

Più tardi l'astronomo Hall fece altre tre serie di osservazioni nel 1875-76, nel 1881-82 e nel 1883-84 e le discusse egli stesso mettendole anche a a confronto con le antiche del Lassell e del Marth (3).

2. Giungiamo così alla classica Memoria di Hermann Struve (4), pubblicata nel 1893 negli Atti dell'Accademia imperiale di Pietroburgo, la quale segna un progresso notabilissimo nello studio della questione che ci occupa.

Hermann Struve riprende in esame tutte le osservazioni già fatte dall'epoca della scoperta del satellite, e le discute insieme con altre quattro serie di osservazioni eseguite da lui stesso, con straordinaria diligenza, negli anni 1887-89-90-92. Lo Struve si servì, a tale scopo, del grande equatoriale di Poulkowo, operando sia col reticolo illuminato su campo oscuro, sia col reticolo oscuro su campo illuminato, ora a luce gialla, ora a luce rossa chiara, ed ora a luce rossa oscura.

3. Riferendoci all'equatore, e chiamando con N ed I il nodo ascendente e l'inclinazione dell'orbita del satellite, abbiamo la seguente

(1) La prima serie delle osservazioni del Lassell è pubblicata nella Rivista « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », VIII e XII; la seconda, ivi, XIII.

(2) Simon Newcomb, « *The Uranian and Neptunian systems* », Washington, Observations for 1873. Appendix I.

(3) Hasaph Hall, « *Orbite of the satellite of Neptune* », Washigton, Observations, II Appendix.

(4) « *Beobachtungen des Neptunstrabanten am 30-zölligen Poulkowaer Refraktor, von Hermann Struve* » Mémoires de l'Académie impériale des sciences de S. Petersbourg.

Tabella I.

Osservatori	Epoca media	N	Errore probabile	C — Oss. ΔN	I	Errore probabile	C — Oss. ΔI
Bond	1848,3	178°,37	± 0°,86	+ 0°,61	145°,05	± 0°,45	+ 1°,18
Otto Struve.	1848,6	182,30	1,00	— 3,37	126,24	0,48	— 0,06
Lassell (a Starfield)	1849,8	176,70	0,50	+ 2,50	126,55	0,21	— 0,57
Lassell (a Malta) .	1852,9	179,02	0,59	+ 0,64	126,21	0,39	— 0,74
Otto Struve	1863,6	181,33	0,77	— 0,09	124,22	0,32	— 0,51
Marth	1864 5	181,65	0,42	— 0,27	124,19	0,28	— 0,63
S. Newcomb	1874,5	183,04	0,14	— 0,17	121,70	0,10	— 0.21
Hall	1876,3	183,47	0,33	— 0,35	121,64	0,19	— 0,03
Holden	1876,5	182,79	0,30	+ 0,36	121,04	0,18	+ 0,54
Hall	1882,1	184,05	0,15	— 0,07	120,03	0,11	+ 0,62
Hall	1883,8	184,67	0,21	— 0,44	120,13	0,23	+ 0,24
Hermann Struve . .	1887,6	184,48	0,15	+ 0,32	119,38	0,13	+ 0,36
Hermann Struve . .	1889,0	185,05	0,11	— 0,05	119,53	0,09	— 0,01
Hermann Struve . .	1890,6	185,51	0.12	— 0,27	119,26	0,10	— 0,01
Hermann Struve . .	1892,6	185,56	0,18	— 0,03	119,06	0,15	— 0,14
Hall	1892,0	185,73	0,45	— 0,28	118,55	0,45	+ 0,47

4. Per ciò che riguarda l'eccentricità e, e la posizione del periastro Q. i dati sono assai incerti, come almeno risultano dalla seguente

Tabella II.

Osservatori	Epoca media	e	Errore probabile	Q	Errore probabile
Newcomb	1874,5	0,0088	± 0,0020	182°	± 7°
Hall	1876,3	0,0090	0,0031	202	14
Holden	1876,5	0,0051	0,0020	88	36
Hall	1882,1	0,0034	0,0014	124	24
Hall	1883,8	0,0100	0,0021	150	11
Hermann Struve . .	1887,6	0,0050	0,0013	267	13
Hermann Struve . .	1889,0	0,0075	0,0011	248	8
Hermann Struve . .	1890,6	0,0072	0,0009	271	6
Hall	1892,0	0,0090	0,0029	201	16
Hermann Struve . .	1892,6	0,0083	0,0014	248	8

La difficoltà e l'incertezza del calcolo della posizione del periastro Q dipende sopra tutto dal valore estremamente piccolo dell'eccentricità e dell'orbita.

Tenendo presenti infatti i metodi della teoria dei minimi quadrati, si vede immediatamente che, in tal caso, un leggiero errore d'osservazione nella posizione del satellite, porta con sè un errore molto più grave nel calcolo di Q.

5. Mentre, come ho detto, i risultati della tabella II sono incertissimi, dalla tabella I appare evidente un *moto secolare nella linea dei nodi*, e una *diminuzione dell'inclinazione*, presso che proporzionali al tempo.

Hermann Struve trova che, prendendo come origine dei tempi l'anno 1890, i due movimenti risultanti dalla tabella I, sono dati, con sufficiente approssimazione, dalle formole:

$$(1) \qquad \begin{cases} N = 185°,15 + 0°,148\,(t - 1890) \\ I = 119°,35 - 0°,165\,(t - 1890)\,. \end{cases}$$

6. Dopo lo Struve, il Dyson eseguì molte osservazioni servendosi del grande equatoriale fotografico di 26 pollici dell'osservatorio di Greenwich, e occultando il pianeta per mezzo di uno schermo (Month. Not. 1903-04). Egli le discusse più tardi in un importante lavoro (1), e adoperando i simboli dello Struve, giunse ai risultati seguenti per l'epoca 1903, 1:

$$2) \qquad N = 187°,58 \qquad I = 117°,40 \qquad e = 0,0008 \qquad Q = 17°.$$

Il Dyson spiega la differenza dei suoi valori di e e di Q con quelli dello Struve, ammettendo un leggiero errore personale nelle osservazioni di quest'ultimo; errore da cui sono immuni le osservazioni fotografiche. Egli assegna infine ai movimenti secolari $\frac{dN}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$ per l'epoca 1896, 7 i valori:

$$3) \qquad \frac{dN}{dt} = 0°,182 \qquad \frac{dI}{dt} = -\,0°,138\,.$$

Il Dyson, esaminando poi il problema del moto *dal lato puramente cinematico*, chiama con α e δ l'ascensione retta e la declinazione del polo P dell'orbita del satellite: e proietta stereograficamente dal polo sud della sfera celeste la curva descritta da P sul piano tangente al polo nord. Prendendo come asse delle x la linea che ha un'ascensione retta di 270°, egli giunge alla seguente

(1) *Discussion of the observations of the satellite of Neptune, made at the Royal Observatory of Greenwich, in the years 1902-1903-1904, by F. W. Dyson.* Monthly Notices, 1905, pp. 570 e 850.

Tabella III.

Epoche	α	$D = 90 - \delta$	y	x
1849,9	269°,12	54°,00	− 0,008	+ 0,510
1864,0	271,49	55.80	+ 0,014	+ 0,529
1875,8	273,10	58,83	+ 0,030	+ 0,574
1883,0	274,36	59,92	+ 0,044	+ 0,574
1890,4	275,27	60,83	+ 0,054	+ 0,585
2903,1	277.58	62,60	+ 0,081	+ 0,603

dove si ha:

$$4) \qquad x = \operatorname{tang} \frac{D}{2} \cos(\alpha - 270 \quad ; \quad y = \operatorname{tang} \frac{D}{2} \operatorname{sen}(\alpha - 270) .$$

7. L'equazione approssimata della curva luogo dei punti $x\ y$ è un cerchio di equazione:

$$(1) \qquad (x - 0{,}453)^2 + (y - 0{,}152)^2 = (0{,}165)^2.$$

Ne segue che il polo P dell'orbita del satellite descrive sulla sfera celeste, con grande approssimazione, un cerchio avente per centro il punto S di coordinate $\alpha = 288°$ e $\delta = 40°$; e per raggio $r = 16°$ circa.

Se si ammette che S sia il polo dell'equatore di Nettuno, l'inclinazione del piano dell'orbita del satellite sul piano equatoriale di Nettuno sarebbe di 16° circa.

Questi risultati, come vedremo, sono assai differenti da quelli ottenuti dal Tisserand (1). Per non protrarre eccessivamente questa Nota preliminare, mi limiterò soltanto a citare le recentissime osservazioni del Barnard (2), del Rice e Hammon (3), del Wirtz (4), molte delle quali non sono ancora discusse.

8. Messo ormai fuori di dubbio il movimento del polo dell'orbita del satellite, resta da indagarne le cause. Il Tisserand (5) *ha creduto scorgerle nel rigonfiamento equatoriale di Nettuno*, troppo piccolo per essere esatta-

(1) Comptes rendus de l'Académie des sciences, CVII e CXVIII.
(2) Astronomical Journal, n. 581.
(3) Astronomical Journal, n. 574.
(4) Astronomische Nachrichten, 4035.
(5) Op. cit. e *Mécanique céleste*, IV, pag. 141 e segg.

mente misurabile con i nostri strumenti (1), ma forse sufficiente a produrre notevoli perturbazioni.

Dai suoi calcoli risulterebbe che l'orbita del satellite è inclinata sul piano equatoriale di Nettuno di un angolo *i* compreso tra 32° e 88°, mentre, secondo la discussione del Dyson, *i* risulterebbe di circa 16°.

I calcoli del Tisserand debbono quindi, in ogni caso, essere ripresi su basi più sicure.

Ma vi è di più. *Sembra che Hermann Struve dubitasse, almeno in parte, della spiegazione del Tisserand*, giacchè egli, pure ammettendo la possibilità dell'ipotesi ora accennata, assegna senza specificare, come causa di questo movimento, l'esistenza di una massa perturbatrice.

« ... *Deren Ursache* — egli dice — *in einer störenden Masse zu suchen ist, welche in einer gegen die Trabantenbahn geneigten Ebene liegt* » (2).

8. Partendo da questo concetto, io mi sono proposto la seguente questione:

« *È possibile di spiegare le perturbazioni secolari (le sole fin qui conosciute)*
« *del satellite di Nettuno, ammettendo l'esistenza di un secondo satellite,*
« *la cui massa sia tanto piccola da sfuggire alle nostre osservazioni?* ».

Questo problema, la cui importanza è manifesta, non è stato fin qui esaminato da alcuno.

Se la risposta sarà negativa, allora l'ipotesi del Tisserand acquisterà un alto grado di probabilità; se invece essa fosse affermativa, allora dovremo discutere con la massima cura le osservazioni dell'ultimo ventennio, per dedurne, in quanto è possibile, anche le perturbazioni periodiche onde risalire agli elementi del secondo satellite perturbatore.

È quel che faremo in altre Note, che spero di far apparire tra breve.

(1) Le osservazioni fatte da Hermann Struve (Mem. cit.) col grande equatoriale di Poulkowo sui diametri di Nettuno, ci dànno, per due angoli di posizione differenti di 90°, i valori $\delta_1 = 2''{,}183$ e $\delta_2 = 2''{,}238$. Il logaritmo della distanza ρ è 1,4742. Inutile di aggiungere che queste osservazioni sono molto incerte, tanto più che sembra che anche la colorazione del campo vi abbia grande influenza. Hermann Struve trova infatti, col campo *giallo*, 2″.120; col campo *rosso chiaro* 2″.197; col campo *rosso oscuro*, 2″.273.

E. E. Barnard nelle sue osservazioni sulla forma di Nettuno, fatte all'osservatorio Lick nel 1894-95 col grande rifrattore di 36 pollici, non notò alcuno schiacciamento apprezzabile. Ad un simile risultato, giunse anche il Wirtz, dell'osservatorio di Strasburgo, il quale, malgrado molte ricerche, non potè stabilire una differenza sensibile tra i varî diametri del pianeta.

Dobbiamo infine notare le recentissime osservazioni del prof. G. Abetti, fatte in Roma, all'osservatorio del Collegio Romano, con l'equatoriale Steinheil-Cavignato di 38 cm. Esse sono state pubblicate in un importante lavoro (Memorie della Soc. degli Spettr. Ital. 1912, I), dove il prof. Abetti discute tutte le osservazioni già pubblicate sull'argomento. L'autore esamina anche l'influenza dell'apertura e dell'amplificazione dello strumento sul diametro osservato, e costruendo opportuni diagrammi, giunge infine al valore 2″,29 riferendosi sempre alla distanza media del pianeta.

(2) Memoria citata.

Meccanica. — *Sulle distorsioni dei sistemi elastici piani più volte connessi.* Nota di G. Colonnetti. presentata dal Socio V. Volterra.

È noto che pei sistemi elastici piani *due volte connessi* il prof. Volterra ha dimostrata l'esistenza di una coppia di assi ortogonali tali che, relativamente ad essi, ciascuna distorsione elementare. la quale conservi il sistema nel suo piano, produce il solo sforzo coniugato (1).

Questo teorema sussiste inalterato *qualunque sia il grado iniziale n di connessione del sistema*, con la sola avvertenza che, siccome a tagli non equivalenti corrispondono in generale coppie diverse di assi. così, quando n è maggiore di uno. si vengono a definire nel piano tante di queste coppie quante sono le distorsioni indipendenti a cui il sistema può essere assoggettato.

Immaginiamo infatti di prendere in considerazione uno qualunque degli $n - 1$ tagli che rendono il sistema dato semplicemente connesso. Poichè per ipotesi, dopo la distorsione il sistema deve restar piano, il moto relativo delle due faccie del taglio che lo caratterizza si può considerare come una rotazione (piccolissima) attorno ad un punto O del piano. Per altra parte il sistema di tensioni che per effetto della distorsione stessa si generano in corrispondenza del taglio, ammetterà sempre una risultante la cui linea di azione r (propria od impropria) giacerà alla sua volta nello stesso piano.

Ed è chiaro che, ammesse le solite ipotesi fondamentali della teoria dell'elasticità, mentre la grandezza di questa risultante deve dipendere (linearmente) dall'ampiezza di quella rotazione, la posizione della sua linea di azione r non può dipendere che dalla posizione del punto O.

Di qui una corrispondenza *biunivoca* tra i punti O e le rette r del piano dato; punti e rette che, per brevità, noi denomineremo rispettivamente coi nomi *di centri* e di *assi di distorsione.*

È facile constatare che *il centro e l'asse di una stessa distorsione non possono mai appartenersi.* Ed invero se l'asse di una distorsione potesse passar pel suo centro l'energia elastica del sistema deformato dovrebbe esser nulla, ciò che non può verificarsi se non è nulla in ogni punto la deformazione.

(1) Cfr. Volterra. *Sur l'équilibres des corps élastiques multiplement connexes.* Ann. éc. norm., (3), vol. XXIV, pag. 513.

Si può poi dimostrare che *se il centro di una distorsione giace sull'asse di un'altra, il centro relativo a questa appartiene all'asse della prima.* Infatti se l'asse della seconda distorsione passa pel centro della prima, il lavoro che gli sforzi relativi a questa distorsione farebbero qualora nel sistema si verificasse la seconda, riesce identicamente nullo. Per il teorema di Volterra sulla reciprocità fra due distorsioni di uno stesso sistema elastico [1], deve allora esser nullo anche il lavoro che gli sforzi relativi alla seconda distorsione farebbero qualora venisse realizzata la prima: il che ovviamente richiede che l'asse di questa passi pel centro dell'altra.

La corrispondenza fra i centri O e gli assi r è dunque una reciprocità priva di elementi uniti.

Il centro, certamente proprio, di questa reciprocità è anche il centro attorno a cui avviene la rotazione relativa delle due faccie del taglio nella distorsione che ha per asse la retta all'infinito del piano, cioè per sforzo caratteristico una coppia.

Per tale centro passano tutti gli assi delle distorsioni che hanno il loro centro all'infinito, nelle quali cioè il moto relativo delle due faccie del taglio si riduce ad una semplice traslazione. E nel fascio da essi formato, detti assi corrispondono alle direzioni delle rispettive traslazioni in una proiettività (prodotto dell'involuzione in esso determinata dalla data reciprocità per l'involuzione ortogonale) la quale ammette sempre due (ed in generale due sole) coppie di elementi uniti disposte fra loro ad angolo retto.

Si hanno così due assi fra loro perpendicolari ciascuno dei quali caratterizza una distorsione in cui il moto relativo delle due faccie del taglio si riduce ad una traslazione nelle direzione dell'asse stesso. Rispetto ad essi sussiste adunque la proprietà che ci eravamo proposti di dimostrare.

Ma le considerazioni qui svolte ci permettono di asserire qualche cosa di più: che cioè esistono infiniti sistemi di riferimento (tra i quali quello di cui ci siamo ora occupati non è che un caso particolare) che godono della proprietà che, rispetto ad essi, ciascuna distorsione elementare non dà origine che al solo sforzo coniugato.

Ciò avviene infatti ogniqualvolta si assuma per sistema di riferimento uno degli ∞^3 triangoli autoconiugati nella reciprocità definita fra assi e centri delle distorsioni piane considerate, riguardando il moto relativo delle due faccie del solito taglio in una distorsione qualunque come risultante di tre rotazioni (perfettamente definite) attorno ai tre vertici del triangolo.

[1] Cfr. V. Volterra, loc. cit., pag. 433.

Fisica matematica. — *Resistenza effettiva e resistenza ohmica.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Tutte le volte che un filo conduttore è sede di una propagazione di onde elettro-magnetiche, si trova in ogni sua sezione normale una resistenza effettiva (rapporto tra il valore medio, rispetto al tempo, del calore di Joule, e il quadrato dell'intensità efficace) superiore alla resistenza ohmica (inversa del prodotto dell'area della sezione pel coefficente di conducibilità elettrica).

Questo fatto si può considerare come una naturale conseguenza dello *skin-effect*, cioè della tendenza che ha un campo elettro-magnetico di forte frequenza a concentrarsi negli strati superficiali del conduttore; ma non è stato finora matematicamente confermato altro che per particolari forme del filo e per particolari tipi di onde.

Scopo della presente Nota è di sopperire a questa lacuna, provando che, dato un filo conduttore sede di una propagazione di onde elettro-magnetiche, smorzate o no (compreso il caso limite che si tratti di un campo stazionario), in ogni sezione normale la resistenza effettiva non è mai inferiore alla resistenza ohmica, e risulta ad essa sempre eguale allora, e allora soltanto, che il filo sia cilindrico, il campo stazionario, e la forza elettrica costante in grandezza e sempre parallela all'asse del filo [almeno se si esclude l'esistenza, dentro il conduttore, di correnti di spostamento (1)].

§ 1. Precisando la denominazione di « filo » data al volume occupato dal nostro conduttore, ammetteremo che esso possa considerarsi come derivato da un cilindro (di sezione qualunque) per semplice deformazione del suo asse in una generica curva C: cioè, che si possa considerare come costituito dall'insieme delle posizioni assunte in una tale deformazione dalle infinite sezioni normali del cilindro (supposte invariabili di forma e invariabilmente unite alla linea che inizialmente fa da asse).

Siano: C un punto qualunque di C; z l'arco di C contato a partire da un'origine arbitraria; S la sezione normale del filo condotta per C; P un punto qualunque di S; $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ i tre vettori unitarî condotti in C rispettivamente secondo la tangente a C (nel verso delle z crescenti), secondo la normale principale (nel senso della concavità) e secondo la binormale (in modo da costituire un triedro destrorso); f e f' la flessione e la torsione di C in C.

(1) Altrimenti, subordinatamente alla condizione posta, in un conduttore cilindrico risulta possibile anche un tipo di campo elettro-magnetico non stazionario, tendente con gran rapidità a confondersi col tipo di campo stazionario specificato nel testo.

Riferito il piano di S ad un sistema di coordinate polari di origine C, assumendo la normale principale come asse polare e contando le anomalie in verso destrorso rispetto a T, diciamo r e ϑ i valori di tali coordinate in P. Per giungere al nostro scopo, conviene riferire le equazioni dell'elettrodinamica al sistema di coordinate curvilinee (z, r, ϑ), ciò che richiede in primo luogo la determinazione della forma ad esso relativa del quadrato dell'elemento lineare.

Essendo, colle notazioni adottate,

$$(1) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{C} + \mathbf{N}\, r\cos\vartheta + \mathbf{B}\, r\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,,$$

per le formole di Frenet avremo, come espressione dello spostamento di P corrispondente agli incrementi infinitesimi $dz, dr, d\vartheta$ di z, r, ϑ:

$$d\mathrm{P} = \mathbf{T}(1 - fr\cos\vartheta)\,dz + \mathbf{N}(rf'\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,dz - \cos\vartheta\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,d\vartheta) + \\ + \mathbf{B}(-rf'\cos\vartheta\,dz + \mathrm{sen}\,\vartheta\,dr + r\cos\vartheta\,d\vartheta)\,.$$

In conseguenza il quadrato dell'elemento lineare nel sistema di coordinate (z, r, ϑ) sarà espresso da

$$(2) \qquad ds^2 = \{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2\}dz^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 - 2r^2 f'\,dz\,d\vartheta\,.$$

Se ne deduce, in particolare, che le linee coordinate (r) sono costantemente normali, sia alle (z), sia alle (ϑ).

§ 2. Rappresentando, in generale, con

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

la forma differenziale che dà il quadrato dell'elemento lineare nel sistema di coordinate curvilinee (x_1, x_2, x_3), con a il suo discriminante, con $a^{(ik)}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ i coefficienti della sua forma reciproca, le proiezioni ortogonali del rot di un vettore $\mathbf{A}$ secondo le normali alle superficie coordinate sono date (1) da

$$\overline{(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})}_{n_i} = \frac{1}{\sqrt{a^{(ii)}\cdot a}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}(\bar{\mathrm{A}}_{i+2}\sqrt{\overline{a_{i+2,\,i+2}}}) - \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}(\bar{\mathrm{A}}_{i+1}\sqrt{\overline{a_{i+1,\,i+1}}})\right\} \\ (i = 1, 2, 3)\,,$$

ove è rappresentata con $\bar{\mathrm{A}}_{i_i}$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{A}$ sulla tangente alla linea coordinata x_i (e si sottintende di riguardare come identici valori dell'indice che differiscono per un multiplo di 3).

Pel ds^2 definito dalla (2), è

$$a = r^2(1 - fr\cos\vartheta)^2\,,$$

(1) Ved. G. Ricci e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, chap. I, § 4; chap. VI, § 2. Math. Ann., LIV Band., 1 Heft.

e

$$a^{(11)} = \frac{1}{(1 - fr\cos\vartheta)^2} \qquad a^{(22)} = 1 \qquad a^{(33)} = \frac{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}{r^2(1 - fr\cos\vartheta)^2}$$

$$a^{(12)} = a^{(23)} = 0 \qquad a^{(13)} = \frac{f'}{(1 - fr\cos\vartheta)^2} .$$

Quindi le equazioni elettrodinamiche di Heaviside-Hertz

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{E} \end{cases}$$

nel sistema di coordinate curvilinee (z, r, ϑ) assumono, con evidente significato dei simboli, la forma

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \bar{E}_{n_z}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c}\bar{E}_{n_z} = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial(r\bar{H}_{l_\vartheta})}{\partial r} - \dfrac{\partial \bar{H}_{l_r}}{\partial \vartheta}\right\} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \bar{E}_{n_r}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c}\bar{E}_{n_r} = \\ = \dfrac{1}{r(1 - fr\cos\vartheta)}\left\{\dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\,\bar{H}_{l_z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}(r\bar{H}_{l_\vartheta})\right\} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \bar{E}_{n_\vartheta}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c}\bar{E}_{n_\vartheta} = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}}\left\{\dfrac{\partial \bar{H}_{l_r}}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\,\bar{H}_{l_z}\right)\right\} \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \bar{H}_{n_z}}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial(r\bar{E}_{l_\vartheta})}{\partial r} - \dfrac{\partial \bar{E}_{l_r}}{\partial \vartheta}\right\} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \bar{H}_{n_r}}{\partial t} = \\ = \dfrac{1}{r(1 - fr\cos\vartheta)}\left\{\dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\,\bar{E}_{l_z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}(r\bar{E}_{l_\vartheta})\right\} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \bar{H}_{n_\vartheta}}{\partial t} = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}}\left\{\dfrac{\partial \bar{E}_{l_r}}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\,\bar{E}_{l_z}\right)\right\}^{(1)} \end{cases}$$

(1) Si ammette implicitamente che in ogni S sia sempre $1 - fr\cos\vartheta > 0$.

Queste equazioni si possono semplificare, rilevando che, per l'osservazione finale del § 1, valgono le relazioni:

$$\bar{E}_{n_r} = \bar{E}_{l_r}$$

$$\bar{E}_{l_z} = \bar{E}_{l_\zeta} \cos(l_z\, l_\zeta) + \bar{E}_{n_z} \operatorname{sen}(l_z\, l_\zeta) = \bar{E}_{l_\zeta} \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}\cdot a_{33}}} + \bar{E}_{n_z} \frac{\sqrt{a_{11}\cdot a_{33} - a_{13}^2}}{\sqrt{a_{11}\cdot a_{33}}} =$$

$$= \frac{-f'r\,\bar{E}_{l_\zeta} + (1 - fr\cos\vartheta)\,\bar{E}_{n_z}}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + f'^2 r^2}}$$

$$\bar{E}_{n_\zeta} = \bar{E}_{l_\zeta} \operatorname{sen}(n_\zeta\, n_z) + \bar{E}_{n_z} \cos(n_\zeta\, n_z) =$$

$$= \bar{E}_{l_\zeta} \frac{\sqrt{a^{(11)}\,a^{(33)} - (a^{(13)})^2}}{\sqrt{a^{(11)}\,a^{(33)}}} + \bar{E}_{n_z} \frac{a^{(13)}}{\sqrt{a^{(11)}\,a^{(33)}}} = \frac{(1 - fr\cos\vartheta)\,\bar{E}_{l_\zeta} + f'r\,\bar{E}_{n_z}}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + f'^2 r^2}}.$$

(ove al posto di **E** si può pensare sostituito **H**). Tenendo conto di esse, le (3) e (4) — ove si sottragga la $(3)_1$ [la $(4)_1$] moltiplicata per $f'r$ dalla $(3)_3$ [dalla $(4)_3$] e, per semplicità, si scriva $E_n \,.\, E_r \,.\, E_\zeta$ rispettivamente al posto di $\bar{E}_{n_z}, \bar{E}_{l_r}, \bar{E}_{l_\zeta}$ — si riducono alle seguenti:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_n}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_n = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (rH_\zeta)}{\partial r} - \dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta}\right\} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_r}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_r = \\ \qquad = \dfrac{f\operatorname{sen}\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_n}{\partial \vartheta} - \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial H_\zeta}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_\zeta}{\partial \vartheta}\right\} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_\zeta}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_\zeta = \\ \qquad = \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial H_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta}\right\} + \dfrac{f\cos\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \dfrac{\partial H_n}{\partial r} \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_n}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (rE_\zeta)}{\partial r} - \dfrac{\partial E_r}{\partial \vartheta}\right\} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_r}{\partial t} = \dfrac{f\operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_n}{\partial \vartheta} - \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial E_\zeta}{\partial z} + f'\dfrac{\partial E_\zeta}{\partial \vartheta}\right\} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\zeta}{\partial t} = \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial E_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial E_r}{\partial \vartheta}\right\} + \dfrac{f\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \dfrac{\partial E_n}{\partial r} \end{cases}.$$

§ 3. Nell'intervallo di tempo $(t, t + \tau)$, il valor medio del calore di Joule, sviluppantesi nel tratto di filo limitato dalla sezione normale S e

da una sezione ad essa parallela condotta alla distanza (infinitesima) dn, è dato da

$$dQ = \frac{4n\sigma}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_S \mathbf{E}^2 \, dS$$

in modo che, posto

$$Q_s = \frac{dQ}{dn}$$

si ha:

$$Q_s = \frac{\sigma}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_S \{ E_n^2 + E_r^2 + E_z^2 \} \, dS \,. \tag{7}$$

Come espressione del quadrato dell'intensità efficace della corrente si ha poi

$$J_{eff}^2 = \frac{\sigma^2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \left(\int_S E_z \, dS \right)^2 . \tag{8}$$

Dovendo, per una ben nota formola di Schwarz, essere

$$\left(\int_S E_z \, dS \right)^2 \leq S \int_S E_z^2 \, dS ,$$

dal confronto delle (7) e (8) risulta immediatamente

$$\frac{Q_s}{J_{eff}^2} \geq \frac{1}{\sigma S} , \tag{9}$$

ciò che prova che in qualunque sezione normale del filo (ed anche, evidentemente, in qualunque altra sezione) la resistenza efficace $\left(= \frac{Q_s}{J_{eff}^2} \right)$ non sarà mai inferiore alla resistenza ohmica $\left(= \frac{1}{\sigma S} \right)$. Le due resistenze coincideranno, cioè nella (9) varrà il segno $=$, allora e allora soltanto che, ad ogni istante, in ogni punto di S sia

$$E_r = E_z = 0 \tag{10}$$

e al tempo stesso valga l'eguaglianza

$$\left(\int_S E_n \, dS \right)^2 = S \int_S E_n^2 \, dS \,, \tag{11}$$

la quale richiede, per esser soddisfatta (1), che E_n abbia lo stesso valore in tutti i punti di S (cioè sia indipendente da r e ϑ).

(1) Infatti, se la (11) è verificata, certamente è possibile di soddisfare l'equazione di 2° grado in x:

$$Sx^2 + 2 \int_S E_n \, dS \, x + \int_S E_n^2 \, dS = 0$$

§ 4. Vediamo di determinare tutti i casi in cui le (10) e (11) sono contemporaneamente soddisfatte in ogni sezione normale di un tratto (non infinitesimo) T del nostro conduttore. Se in T è ad ogni istante:

$$E_z = E_r = \frac{\partial E_n}{\partial r} = \frac{\partial E_n}{\partial \vartheta} = 0 ,$$

le equazioni (5), (6) si riducono alle seguenti:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_n}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_n = \dfrac{1}{r}\left\{ \dfrac{\partial (r H_z)}{\partial r} - \dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta} \right\} \\ 0 = \dfrac{f \operatorname{sen}\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_n}{\partial \vartheta} - \dfrac{\dfrac{\partial H_z}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_z}{\partial \vartheta}}{1 - fr\cos\vartheta} \\ 0 = \dfrac{f\cos\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \dfrac{\partial H_n}{\partial r} + \dfrac{\dfrac{\partial H_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta}}{1 - fr\cos\vartheta} \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_n}{\partial t} = 0 . \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_r}{\partial t} = \dfrac{f \operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_z}{\partial t} = \dfrac{f\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} \end{cases}$$

Derivando la $(12)_1$ rispetto a t, e tenendo conto delle $(13)_2$ $(13)_3$ si trova

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial E_n}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} E_n \right\} = -\frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{fr\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{f \operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} \right) \right\},$$

cioè, posto

$$\theta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} = \text{tempo di rilassamento},$$

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial E_n}{\partial t} + \frac{E_n}{\theta} \right\} = \frac{-f^2 E_n}{(1 - fr\cos\vartheta)^2} .$$

---

con un (ed uno solo) valore reale di x o, ciò che è lo stesso, è possibile di determinare una quantità x reale e indipendente da r e ϑ, in modo che si annulli l'integrale

$$\int_S (E_n + x)^2\, dS .$$

Poichè E_n non dipende nè da r, nè da ϑ, quest'eguaglianza non potrà essere verificata altro che quando, in T,

1°) la flessione della direttrice sia sempre nulla (cioè il filo sia cilindrico);

2°) si abbia costantemente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_n}{\partial t}+\frac{E_n}{\theta}\right)=0.$$

Ma se è $f=0$, posto, come allora è lecito, $f'=0$ (1), dalle (12) segue anche

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_n}{\partial t}+\frac{E_n}{\theta}\right)=0,$$

e dalle (13)

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0.$$

Se ne conclude che, supposto pure che il filo sia cilindrico, la resistenza efficace coinciderà colla resistenza ohmica (allora e allora soltanto) che sia:

1°)
$$\mathbf{E}=\{e_n+e_n^{(z)}\,e^{-\frac{t}{\theta}}\}\,\mathbf{T},$$

ove e_n, $e_n^{(z)}$ sono quantità indipendenti da t, la prima delle quali non dipende neppure da z;

2°)
$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma}{c}\,e_n\,\mathbf{T},$$

cioè

$$\mathbf{H}=\operatorname{grad}\psi+\frac{2\pi\sigma}{c}\,e_n\,\mathbf{T}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{C}),$$

ove lo scalare ψ non dipende dal tempo e soddisfa alla condizione

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=\operatorname{div}\mathbf{H}=0.$$

§ 5. Limitandosi fin da principio alla considerazione di campi elettromagnetici stazionarî, si può arrivare, in modo più semplice, a determinare le condizioni sotto cui accade che la resistenza efficace coincida colla resistenza ohmica. Se il campo è stazionario, detto φ il suo potenziale scalare, sarà

$$E_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\qquad E_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta},$$

(1) Con ciò le linee (z) si riducono a rette parallele all'asse del conduttore.

onde, se sono verificate le (10), φ non potrà dipendere altro che da z. In conseguenza avremo

$$E_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}\cos(l_z n_z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}\,\mathrm{sen}\,(l_z l_z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

cioè

$$E_n = \frac{1}{1 - fr\cos\vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Evidentemente questa eguaglianza non è compatibile colla (11) altro che quando sia $f = 0$. Ciò porta immediatamente a conclusioni che coincidono con quelle del § precedente, riferite al caso limite $\theta = 0$.

§ 6. Prima di terminare sarà forse opportuno richiamare l'attenzione del lettore sul fatto che la resistenza effettiva di un tratto di filo conduttore limitato da due sezioni normali può, se il filo non è rettilineo, risultare inferiore alla sua resistenza ohmica [1]: questo, perchè nella presente ricerca non appaia come una restrizione inutile o ingiustificata l'aver riferito resistenza effettiva e resistenza ohmica ad una sezione normale del filo (cioè, sostanzialmente, a un tratto di filo limitato da una sezione normale e da una sezione ad essa parallela e infinitamente prossima).

Matematica. — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota I di N. Zeilon, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Nella sua Memoria sulle equazioni integro-differenziali il prof. Volterra [2] ne inizia lo studio sistematico coll'applicare il metodo di Green all'equazione tipica di genere ellittico:

$$(I) \qquad Au = \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial z^2} + \int \left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right] d\tau = 0.$$

Il primo problema che si incontra consiste nel formare la *soluzione fondamentale* della (I), la quale viene calcolata, nella detta Memoria, me-

[1] V. A. Signorini, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore toroidale* (Questi Rend., vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem.).

[2] *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.* Acta math., tom 35.

diante uno sviluppo in serie. In questa breve Nota mi permetto di trattare lo stesso problema con un metodo che si applica in casi assai generali d'equazioni alle derivate parziali (1). Ottengo, nel caso dell'equazione (I), un'espressione di forma differente da quella del Volterra, ma l'identità dei resultati si prova senza difficoltà.

2. Procedendo come se si trattasse di un'equazione differenziale a coefficienti costanti, sostituiamo alla (I) la stessa equazione

$$\text{(II)} \qquad A\,u = \varrho(x\,,\,y\,,\,z\,;\,t)$$

con un secondo membro, funzione arbitraria di $x\,,\,y\,,\,z\,,\,t$, e cerchiamone una soluzione qualunque, scritta nella forma

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\tau} \varrho(\lambda\,,\,\mu\,,\,\nu\,;\,\tau)\,\mathrm{F}(x-\lambda\,,\,y-\mu\,,\,z-\nu|t\,,\,\tau)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,d\tau\,.$$

Chiamiamo, per analogia, F l'*integrale fondamentale* dell'equazione (I).

Nel metodo ricordato si sostituisce alla funzione ϱ la sua rappresentazione mediante l'integrale multiplo del Fourier. Seguendo questa idea, poniamo:

$$\text{(1)} \qquad \varrho = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(\lambda\,,\,\mu\,,\,\nu\,;\,t)\times$$
$$\times\, e^{i(\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu))}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,,$$

e si vede che la risoluzione della (II) viene ridotta a quella dell'equazione

$$A u = \varrho(\lambda\,,\,\mu\,,\,\nu\,;\,t)\,e^{i(\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu))}\,,$$

di cui la soluzione sia

$$u = x(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,;\,\lambda\,,\,\mu\,,\,\nu\,;\,t) = x(t)\,.$$

Troviamo:

$$\text{(2)} \qquad x(t) + \frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\int(\alpha^2 f + \beta^2\varphi + \gamma^2\psi)\,x(\tau)\,d\tau =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cdot\varrho(\lambda\,,\,\mu\,,\,\nu\,;\,t)\,,$$

equazione integrale in cui possiamo supporre il limite superiore o variabile (tipo del Volterra) o costante (tipo del Fredholm).

(1) Vedi Zeilon, *Das Fundamentalintegral der allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*, Arkiv f. Mathematick, Astronomie u. Fysik Stocolma 1911; *Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle de la physique mathématique*, Arkiv f. Matematik ecc., Stocolma 1913.

3. Sia $D'(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)$ il nucleo risolvente dell'equazione (2); avremo:

$$(3) \qquad x(t) = \frac{-1}{8\pi^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \times \times \left(\varrho(\lambda, \mu, \nu; t) + \int D'(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau \right),$$

relazione che più comodamente si scrive

$$(3') \qquad x(t) = \frac{-1}{8\pi^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \int D(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau$$

$$D = \varepsilon(t, \tau) + D',$$

denotando con $\varepsilon(t, \tau)$ una funzione (definita mediante un'espressione di limite conveniente) soggetta alla condizione che

$$\int \varepsilon(t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau = \varrho(\lambda, \mu, \nu; t).$$

La soluzione della (II) si scrive adesso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu; t) \times \times e^{i[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu)]}\, d\alpha\, d\beta \ldots d\nu,$$

e si forma evidentemente nel modo desiderato per mezzo d'un integrale fondamentale F, la cui espressione, scrivendo x invece di $x - \lambda$ ecc., sarà la parte reale di

$$(III) \qquad F(x, y, z | t, \tau) = = -\frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

4. La convergenza dell'integrale (III) può discutersi come nei casi analoghi delle equazioni differenziali di tipo ellittico. Si osserva che c'è una singolarità nel punto $\alpha = \beta = \gamma = 0$; quindi bisogna definire un valore principale evitando questa singolarità, il che può farsi in modi diversi. Supponiamo, per es., che la integrazione rispetto a γ si eseguisca fra $-\infty$ e $-\delta$, e fra $+\delta$ e $+\infty$, δ essendo una piccola quantità positiva: invece di (III), prendiamo il limite per $\delta = 0$ dell'espressione risultante.

Nel caso d'un'equazione del tipo del Volterra, la convergenza è accertata, D essendo allora una funzione sempre finita, almeno per i valori finiti delle α, β, γ. Ora l'equazione (2) fa vedere che D è funzione omogenea,

d'ordine zero, di α, β, γ; quindi la funzione sotto il segno $\int$ si comporta, per i valori grandi di α, β, γ, come la funzione

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,.$$

e la convergenza dell'integrale (III) risulta dalla convergenza dell'integrale conosciuto:

$$-\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=\frac{-1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Al contrario, nel caso d'un'equazione (2) del tipo del Fredholm, la D' potrà possedere dei poli reali, di modo che la definizione del valore principale dovrebbe forse modificarsi.

5. L'espressione (III) si semplifica con un calcolo in cui interviene la omogeneità della funzione D. Osservando che essa è una funzione reale, la quale contiene γ alla seconda potenza, abbiamo facilmente:

$$F=-\frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{D(\alpha,\beta,\gamma\,|\,t,\tau)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,;$$

e scrivendo $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ invece di α, β, troviamo:

$$F=-\frac{1}{4\pi^3 x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{D(\alpha,\beta,1\,|\,t,\tau)}{\alpha^2+\beta^2+1}\cos\gamma(\alpha x+\beta y+z)\,d(\alpha x)\,d\beta\,d\gamma\,.$$

Ma adesso la integrazione rispetto ad αx e γ si riguardi come costituente un integrale doppio del Fourier, di modo che

$$\text{(IV)}\qquad F=-\frac{1}{4\pi^2 x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{D\left(-\frac{\beta y+z}{x},\beta,1\,|\,t,\tau\right)}{\left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1}\,d\beta\,,$$

integrale semplice che richiede la conoscenza del nucleo risolvente dell'equazione integrale

$$(4)\qquad x(t)+\frac{1}{\left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1}\times$$
$$\times\int\left[\left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2 f+\beta^2\varphi+\psi\right]x(\tau)\,d\tau=\mu(t)\,.$$

Matematica. — *Il teorema del valor medio.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio C. Segre.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Un generatore invertibile per correnti continue, senza collettore nè contatti striscianti* (1). Nota di O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una Nota presentata nella precedente Seduta abbiamo dimostrato che con un indotto di speciale costruzione debbono verificarsi i seguenti fatti:

1°) L'indotto deve ruotare in un campo magnetico, sviluppando una coppia costante, qualora sia attraversato da una corrente continua inviata tra gli estremi puntiformi dell'albero; e la sua rotazione non si inverte invertendo il campo.

2°) Tenendo in rotazione l'indotto in un campo uniforme di qualsiasi senso si svilupperà una forza elettromotrice costante che può raccogliersi tra gli estremi dell'albero, e cioè senza nè collettore, nè contatti striscianti.

3°) Questa f. e. m. può ugualmente ottenersi tenendo fisso l'indotto in un campo ruotante, il che rende possibile ottenere da correnti polifasiche una corrente continua, per induzione elettromagnetica, senza organi in movimento.

* * *

1°) Per ottenere la verifica sperimentale della prima proprietà si è proceduto nel modo seguente:

Tra due punte di centro P e Q (fig. 1) può ruotare un asse costituito da due cilindretti di ottone *m* ed *n* riuniti meccanicamente (ma isolati elettricamente) da un manicotto di ebanite, le cui estremità sono filettate in modo da permettere di avvitarvi i due dadi, pure di ebanite, *d* e *d'*.

Mediante questi dadi si possono fissare all'asse, ortogonalmente fra loro, due telai costituiti ciascuno nel modo seguente. Con una lamina di rame dello spessore di cm. 0,2 si è costruito un telaio rettangolare di cm. 3,6 × 7,4 sostituendo però, nel centro di uno dei due lati maggiori e per un tratto lungo cm. 3, una laminetta di bismuto al rame.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

I lati minori sono stati foggiati in modo (fig. 2), che i detti telai potessero essere montati sull'asse descritto, stringendoli tra i dadi di ebanite d e d'; delle lamine di mica li isolavano fra loro. Due nastri di rame A e B (fig. 1), che partono dagli estremi r ed s delle due parti isolate dall'asse fanno capo ai centri N ed M′ (fig. 3) dei due lati liberi più lontani delle due laminette di bismuto, mentre un altro nastro di rame riunisce i

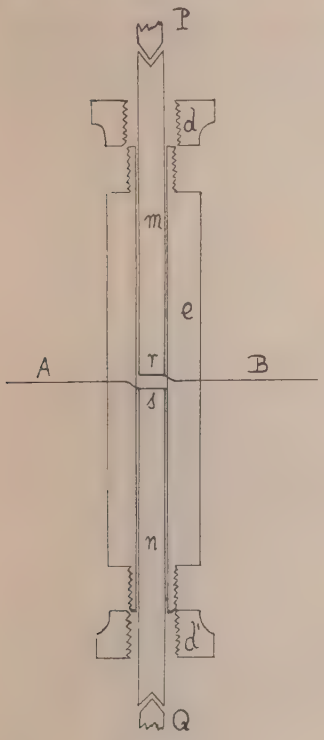


Fig. 1.

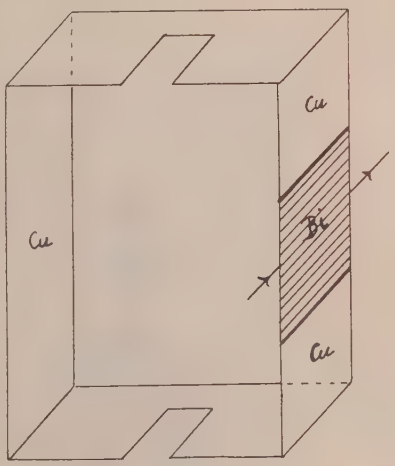


Fig. 2.

centri dei due lati più vicini in modo che *una corrente proveniente dalla parte superiore dell'asse attraversa le due lamine tra i centri dei loro lati liberi, e torna alla parte inferiore dell'asse*; *il nastro si svolge in un piano normale all'asse di rotazione del sistema.* In virtù di quanto fu dimostrato nella precedente Nota tale sistema, che è rappresentato nella figura 4, è soggetto, in un campo perpendicolare al suo asse di rotazione, ad una coppia costante il cui senso è indipendente dalla direzione del campo. E infatti l'esperienza prova che si ottiene una rotazione continua e uniforme che non muta di senso invertendo il campo.

Il movimento dell'apparecchio viene fortemente frenato dalle correnti indotte che si sviluppano nei telai e che dànno luogo, come è facile rico-

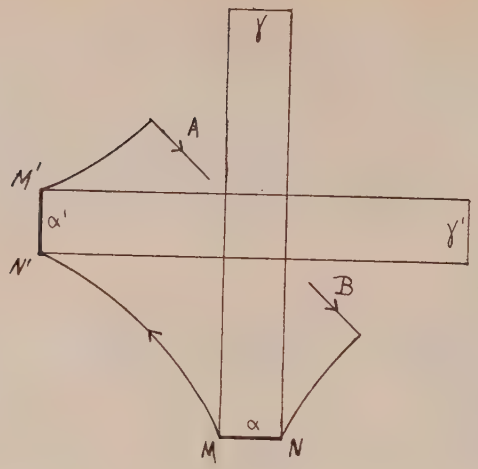


Fig. 3.

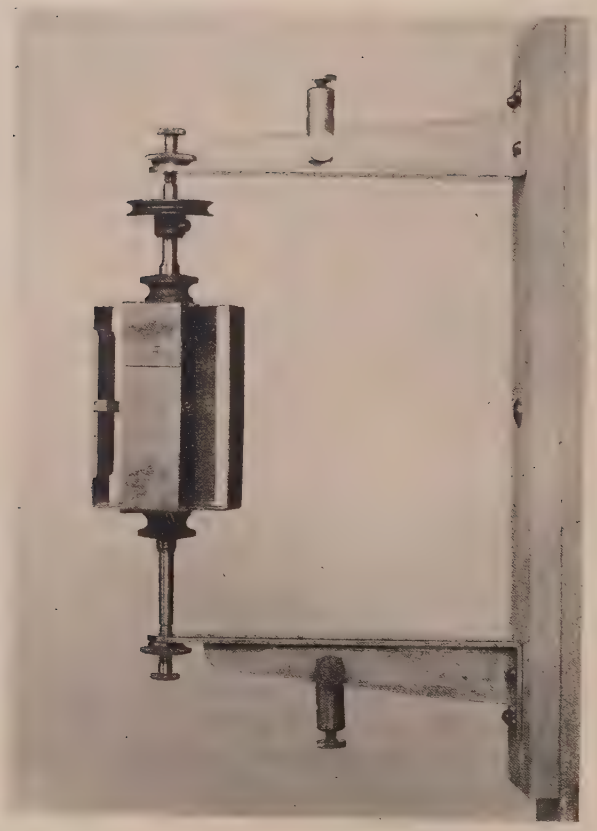


Fig. 4.

noscere, a una coppia resistente, il cui valore aumenta con la velocità di rotazione.

Infatti, supposto che il sistema dei telai ruoti con velocità angolare ω, ognuno di essi sarà sede di una corrente indotta proporzionale alla derivata del flusso N che lo attraversa. La f. e. m. che genera questa corrente sarà:

$$e = -\frac{dN}{dt},$$

mentre si ha d'altra parte, indicando con ϑ l'angolo formato (fig. 5) dalla normale al telaio col campo, e con S la superficie del telaio

$$N = SH \cos \vartheta = SH \cos \omega t .$$

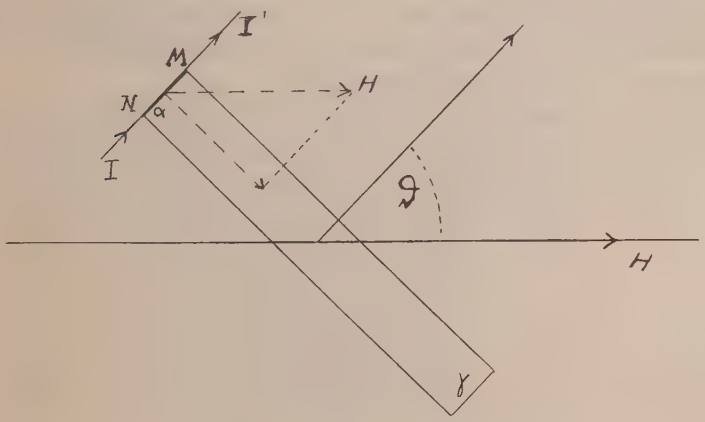


Fig. 5.

Se chiamiamo r la resistenza della lastrina e si trascura la resistenza della parte in rame di ciascun telaio di fronte a quella della lastrina di bismuto, avremo che l'intensità i della corrente indotta dal movimento sarà:

$$i = \frac{1}{r} SH\omega \operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{r} SH\omega \operatorname{sen} \vartheta .$$

Il lavoro dW necessario per una rotazione $d\vartheta$ sarà perciò

$$dW = i \frac{dN}{dt} d\vartheta = -\frac{1}{r} SH\omega \operatorname{sen} \vartheta . SH \operatorname{sen} \vartheta . d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{r} S^2H^2 \omega \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\vartheta .$$

La coppia resistente sarà dunque, in valore assoluto,

$$C_1 = \left| \frac{dW}{d\vartheta} \right| = \frac{1}{r} S^2H^2\omega \operatorname{sen}^2 \vartheta .$$

Una coppia C_2 sarà richiesta dall'altro telaio, e il suo valore sarà evidentemente

$$C_2 = \frac{1}{r} S^2 H^2 \omega \cos^2 \vartheta .$$

La coppia resistente totale sarà adunque

$$C = \frac{1}{r} S^2 H^2 \omega$$

e, come si vede, anche questa coppia è indipendente dalla posizione dei due telai rispetto al campo.

Nelle condizioni da noi realizzate era molto intensa la coppia motrice, e altrettanto elevata quella resistente, in modo da poter ritenere trascurabile l'ostacolo al moto derivante dagli attriti.

La velocità raggiunta si può calcolare eguagliando perciò la coppia motrice da noi calcolata nella precedente Nota, e la resistente, non tenendo conto, in prima approssimazione, dell'ostacolo prodotto dalle correnti di Foucault nella massa del rame costituente i telai. Si ha così:

$$KSH^2 I = \frac{1}{r} S^2 H^2 \omega ,$$

e perciò

$$\omega = \frac{KIr}{S}$$

La costante K dipende, come si disse nel lavoro citato, dal momento ionico differenziale E del metallo e dalle dimensioni della laminetta.

Si ha all'incirca:

$$K = E \frac{a}{l}$$

dove a è la larghezza, ed l la lunghezza della laminetta. Si può così prevedere che con una lamina di un metallo avente una resistenza specifica più elevata del bismuto, e una costante E non troppo minore, la velocità raggiunta possa essere maggiore. La coppia è però massima col bismuto: nel nostro caso colla corrente di una unità elettromagnetica, e un campo di 6000 Gauss, la coppia aveva il valore rilevante di 20000 dine-centimetro, o di circa 20 grammi-centimetro. Nell'apparecchio poteva mandarsi senza inconvenienti una corrente di 3 unità e. m.; ne risultava una coppia di circa 59 grammi-centimetro.

* * *

Come prevede la teoria, se con un motore si mette in rotazione l'indotto (che a tale scopo porta sull'asse una puleggia) in un campo magne-

tico *sia continuo, che alternativo*, si ottiene una forza e. m., costante nel primo caso, pulsante nel secondo, il cui senso dipende unicamente dal senso di rotazione.

Il valore della f. e. m. fu misurato in corrispondenza della velocità di tre giri al secondo impressa all'apparecchino e in un campo costante di 6000 Gauss; e fu trovata pari a millivolt 4,3. La velocità potè essere accresciuta fino a raggiungere una forza e. m. di 18 millivolt; chiudendo allora l'apparecchio in corto circuito su un amperometro si ottenne una corrente continua superiore a un decimo di ampere.

***

Per verificare la terza proprietà dell'indotto, ci siamo serviti di un campo Ferraris, ottenuto con un avvolgimento a stella, alimentato da cor-

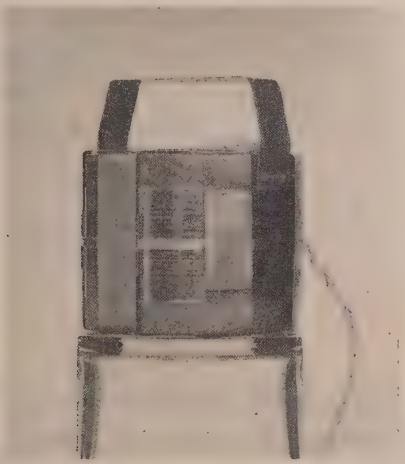


Fig. 6.

renti trifasi, ed eseguito, come di solito, intorno ad un anello di lamina di ferro. Nelle cavità di detto anello poteva introdursi un indotto simile a quello descritto, ma costituito da tre anzichè da due telai, disposti a 60° l'uno dall'altro, e riempiti nella parte corrispondente al bismuto di lamine di ferro, allo scopo di intensificare il campo là dove ciò era utile (fig. 6).

I telai erano isolati con mica tra loro e dalla carcassa di ferro. Un cordone di rame saldato agli estremi del nastro che riunisre i centri dei lati liberi delle lamine di bismuto, si poneva in comunicazione con un voltometro Weston, dove si leggeva direttamente la f. e. m. costante sviluppata.

La velocità di rotazione del campo era nota, essendo nota la frequenza della corrente che lo alimentava.

Con una velocità del campo pari a circa 54 giri per secondo, la f. e. m. continua e costante ottenuta era di circa 5 millivolt. Questa esperienza

può rendersi molto suggestiva tenendo l'indotto a notevole distanza dall'anello che produce il campo rotante, e constatando la f. e. m. continua prodotta con un galvanometro sensibile, di bassa resistenza. Riesce così molto facile il verificare che tutto intorno all'anello, e a notevole distanza, è possibile ricavare una corrente continua per induzione, e che la sua direzione si inverte quando si inverte la rotazione del campo o rovesciando la corrente in una delle fasi, ovvero avvicinandosi all'anello dall'esterno anzichè dall'interno di esso.

***

Abbiamo già enunciato nel lavoro precedente che fenomeni analoghi, per quanto in scala più ridotta, debbono potersi ottenere ricorrendo a telai omogeni di qualunque metallo per il quale la costante E non sia troppo bassa.

Effettivamente noi abbiamo potuto riprodurre la terza esperienza (per cui la costruzione dell'indotto è più agevole), ricorrendo a un sistema di telai costruiti interamente in rame. Mentre questo metallo presenta una costante Hall che è appena $\frac{1}{10000}$ di quella del bismuto, la costante per gli effetti elettromagnetici è solo $\frac{1}{150}$ della corrispondente nel bismuto. Ed infatti l'apparecchino ha dato i risultati che si potevano prevedere riducendo circa a $\frac{1}{150}$ ciò che si era ottenuto col bismuto.

Fisica. — *Motore termico fondato sulla rotazione che subisce un disco di bismuto riscaldato al centro o alla periferia, nel campo magnetico.* Nota di L. Tieri, presentata dal Socio V. Volterra.

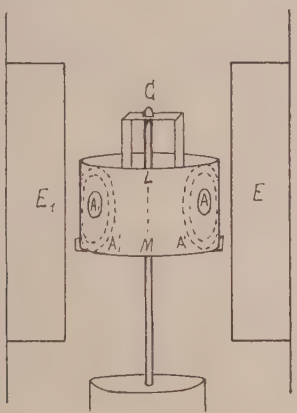
Nel 1911, in una riunione della Società italiana di fisica (sezione di Roma), il prof. Corbino espose e illustrò con l'esperienza la proprietà di un disco di bismuto di orientarsi nel campo magnetico quando è riscaldato al centro o alla periferia (1). Il prof. Volterra faceva notare, come disponendo opportunamente delle sorgenti calde e fredde intorno a un sistema di dischi, *si dovesse realizzare un movimento continuo di rotazione in modo da costituire una vera e propria macchina termica avente una sorgente calda e un refrigerante.* L'esperienza fu fatta dal prof. Corbino con due dischi di bismuto aventi lo stesso centro e disposti a 90° fra loro; ma il risultato fu negativo, sia perchè nei dischi si formavano delle intense correnti di

(1) Rend. Acc. Lincei, 5ª serie, XX, 1° sem. 1911, pag. 569.

Foucault che si opponevano al moto, dato il grande spessore dei dischi stessi, sia perchè si incontrarono delle difficoltà pel riscaldamento e raffreddamento dei dischi, sia perchè ad ogni rotazione di 90 gradi si passava per un punto morto, che il sistema rotante non riusciva a superare con l'acquistata velocità.

Sono riuscito a costruire un motorino termico fondato sul precedente concetto, nel seguente modo:

Un cilindro cavo di bismuto, del diametro di cm. 4,8, alto cm. 3,1 e dello spessore di cm. 0,05, è sorretto da un leggero sostegno di lamina di alluminio a forma di Ω che porta in C un cappelletto di agata che poggia su una punta. Il cilindro cavo di bismuto vien posto fra le espansioni po-



lari piatte E E_1 di una grande elettrocalamita Weiss, in modo che, eccitando l'elettrocalamita, il cilindro di bismuto viene a trovarsi in un campo pressochè uniforme di circa 5000 unità. Se in queste condizioni si concentra nell'area A del cilindro un fascio di raggi provenienti da una lampada ad arco, il cilindro di bismuto si pone in rotazione nel senso degli indici di un orologio se si guarda dall'alto. La velocità di rotazione del cilindro aumenta sensibilmente se l'area illuminata si estende fino alla punteggiata A′. Invertendo il campo, non si inverte il senso di rotazione. Se invece si riscalda la zona punteggiata A′ con un fascio anulare, intercettando con opportuno schermo la luce nella parte centrale di tale zona, si riesce talvolta ad ottenere la rotazione del cilindro in senso contrario agli indici di un orologio se si guarda dall'alto. Moti rispettivamente contrarî ai precedenti si hanno se del cilindro di bismuto si illumina l'area A_1 o la zona punteggiata A'_1.

Perchè il riscaldamento nella regione illuminata avvenga più rapidamente, e perchè sia più rapido il raffreddamento delle altre parti del cilindro, questo è ricoperto, internamente ed esternamente, di uno strato di nerofumo.

Se si tien presente l'esperienza del Corbino col disco di bismuto, è facile rendersi conto del funzionamento dell'apparecchio. Nell'esperienza del Corbino un disco di bismuto è sospeso fra le espansioni polari di una elettrocalamita a 45° dalle linee di forza del campo, per mezzo di un filo metallico, che compensa con la sua torsione la coppia orientatrice dovuta al diamagnetismo, la quale tenderebbe a portare il disco in direzione normale alle linee di forza del campo. Inviando nel centro del disco un fascio di luce, il disco ruota disponendosi nella direzione delle linee di forza del campo: la rotazione si inverte, se del disco si scalda la periferia. La coppia è massima a 45° dalle linee di forza. Ebbene, se nel cilindro di bismuto si scalda l'area A a 45° rispetto alle linee di forza del campo, quest'area viene sollecitata a disporsi nella direzione delle linee di forza del campo, e perciò il cilindro incomincerà a ruotare nel senso degli indici di un orologio se guardato dall'alto. In A intanto si presenta una nuova zona del cilindro, la quale, riscaldata dal fascio di luce che conserva sempre la stessa direzione, sarà anch'essa sollecitata a muoversi nello stesso senso: e così via.

La velocità di rotazione del cilindro non potrà evidentemente essere grande, a causa delle correnti di Foucault che si generano nella massa di bismuto; però gli effetti di queste si riducono abbastanza piccoli se è piccolo lo spessore del bismuto. La sottigliezza del bismuto influisce probabilmente sulla velocità del cilindro, per un'altra ragione. Come ben si comprende, tale velocità dipenderà dalla differenza di temperatura fra A e A_1; e precisamente, se maggiore è questa differenza di temperatura, maggiore sarà la velocità con cui si muove il cilindro. Se le temperature in A e A_1 fossero uguali, il cilindro rimarrebbe fermo; e se la temperatura in A_1 fosse maggiore che non in A, il disco ruoterebbe in senso contrario. Ora, siccome le parti riscaldate si muovono da A verso A_1, quanto più rapido sarà il riscaldamento delle regioni del cilindro che arrivano in A, e quanto più rapido sarà il raffreddamento di quelle che se ne allontanano, tanto più rapida sarà la rotazione del cilindro. La velocità di rotazione aumenta ancora, se in un modo qualunque si favorisce il raffreddamento del cilindro a partire dalla generatrice LM (p. es., facendo sgocciolare dell'etere lungo tale generatrice); e l'effetto sarà ancora maggiore se si riscaldano l'area A e la sua opposta, e si raffreddano la zona LM e la sua opposta.

Fisica matematica. — *La verifica del principio di reciprocità di Volterra, nel caso generale.* Nota di G. Tasca Bordonaro, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Sul terremoto del 13 gennaio 1915.* Nota di Giulio Grablovitz, presentata dal socio P. Blaserna.

Il disastroso terremoto della Conca del Fucino venne percepito generalmente anche nell'isola d'Ischia col grado V della scala Mercalli e fu seguito sino alla fine di gennaio dalla registrazione di ben 73 repliche, tosto comunicate telegraficamente al R. Ufficio centrale di meteorologia e Geodinamica e distinte nel quadro in fine alla presente Nota.

Ne ebbi argomento ad indagini che, se pure sono ben lungi dall'essere condotte a termine, bastano a fornire già ora qualche particolare degno di speciale menzione come guida agli obbiettivi da tenersi di mira nello studio di tali fenomeni che con deplorevole frequenza funestano l'Italia.

Gli strumenti che permisero una sicura determinazione del primo impulso nell'isola d'Ischia, come da relazione inviata al prefato Ufficio, furono cinque, cioè i *pendoli orizzontali* con masse di 12 chilogrammi e la *vasca sismica*, in entrambe le stazioni della *Grande Sentinella* e del *Porto d'Ischia*: ed in quest'ultima il *tromografo*. Questo strumento, che, costruito nel 1906, si dimostrò adatto alla registrazione dei terremoti vicini o locali, è di facilissimo trasporto, e per la semplicità del suo maneggio potè essere rimesso quasi immediatamente in funzione, mentre gli altri ebbero la sorte di quasi tutti gli apparecchi non frenati della penisola.

Il primo impulso si potè fissare a $7^h\,53^m\,12^s$ per un punto intermedio fra le due stazioni avente per coordinate: $\varphi = 40°\,44'\,36''$ N. e $\lambda = 13°\,55'\,24''$ est Greenwich; nè v'è da temere errore apprezzabile nel tempo campione, basandosi questo su una linea meridiana, in cui è apprezzabile anche la frazione di secondo. Inoltre è già nota la pur minima correzione lungo tutta la sua escursione; ed i controlli, fatti mediante teodolite presso al solstizio invernale con altezze di *Vega* e *Capra* in primo verticale, diedero correzioni di frazione di secondo una volta in più ed un'altra in meno, con vicendevole quasi completa eliminazione. Pur volendo supporre che l'edificio avesse subìto un cedimento per effetto del recente terremoto, esso viene escluso dalle meridiane dei giorni precedenti e seguenti, perchè esse si raccordano soddisfacentemente.

Dall'ampiezza delle prime oscillazioni la provenienza media degli urti risultò da N 18° W a conferma della diretta osservazione eseguita alle *livelle geodinamiche*; quella orientata da NNE a SSW presentava oscillazioni massime di 90 mm = 45″, mentre l'altra, facente con essa angolo retto, aveva un'ampiezza di poco inferiore, e le oscillazioni verso NNE dell'una concomi-

tavano con quelle verso WNW dell'altra in guisa da dare la suddetta risultante.

La determinazione della distanza, se non fu ricavabile dalla prima grande perturbazione negli apparecchi ch'erano usciti di funzione, si potè fare sulle repliche immediatamente successive e risultò, in prima approssimazione, = 160 chilometri, che con la detta direzione corrispondono ad un punto vicino a Scurcola Marsicana, cioè nella zona disastrosa. Senza volermi pronunciare definitivamente sulla posizione dell'epicentro, nè voler qui discutere la questione d'un secondo possibile epicentro simultaneo, mi limito a considerare nel suo complesso la zona del massimo disastro, donde irradiò la propagazione sismica. In tale giudizio credo che la cifra delle vittime, se anche insufficiente a dare un criterio esatto, ha tuttavia un significato maggiore delle stesse rovine edilizie, le quali nella loro estensione sono certamente più gravi nei luoghi in cui la popolazione non trovò nè tempo nè luogo da porsi in salvo. Forse il criterio delle vittime non calza fra un terremoto avvenuto di giorno ed un altro che avvenga di notte quando tutta la popolazione è nel sonno: ma per uno stesso terremoto in paesi aventi analoghe consuetudini, le enormi differenze accertate fra le percentuali delle vittime umane non si spiegano, nella loro generalità, se non con la diversità di violenza del fenomeno. Così osservo che di fronte ad Avezzano, al NW del Fucino, col 90 % di vittime si trovano all'est i comuni di Pescina con S. Benedetto, Gioja dei Marsi, Collarmele ed Ortucchio, con percentuali fra 50 e 75 %, mentre Celano, Ajello e Cerchia, interposti al nord dànno da 10 a 15 %, e molto di meno Trasacco, Luco ed altri situati al SW. Perciò, per le ulteriori deduzioni assumo un punto centrale del Fucino, cioè: $\varphi = 42°$ N; $\lambda = 13°$ 35′ E.

Ad analoga conclusione pervenne il prof. Martinelli, capo della sezione geodinamica del predetto R. Ufficio centrale, in un suo pregevolissimo lavoro intitolato « *Prime osservazioni sul terremoto italiano del 13 gennaio 1915* », ove, basandosi sulle numerose informazioni pervenute da ogni parte della penisola fino al 27 gennaio, costruì un grafico dell'intensità graduale del fenomeno secondo la scala Mercalli. Tali informazioni si addensano naturalmente di più nella zona maggiormente danneggiata; e se si considera l'eterogeneità degli apprezzamenti a seconda delle varie fonti da cui emanano, riesce vieppiù spiccato l'accordo in cui l'elisse allungata, rappresentante il X grado, si trova rispetto alle località sopra enumerate.

L'autore presenta il suo lavoro in forma preliminare, il che non lo dispensa dall'illustrarlo, come fa egregiamente, con confronti sulla anteriore sismicità della regione e con opinioni di varii studiosi.

Il prof. Agamennone a sua volta s'è già occupato della velocità di propagazione della prima scossa, utilizzando a tale scopo i dati giunti a sua cognizione fino alla presentazione, alla Reale Accademia dei Lincei, della sua Nota intitolata « *Il recente terremoto della Marsica e gli strumenti*

sismici ». Su 20 stazioni ne pone in disparte sette, per le quali, *per una ragione o per l'altra, si nutre qualche sospetto*, e dalle altre 13, ponendo a base le tre più vicine, trae come risultato M 7690 quale media velocità uniforme del primo impulso, e $7^h 53^m 44^s$ quale istante all'epicentro. Non discuto i criterii coi quali fece lo scarto di 7 stazioni, mentre forse, procurandosi i rispettivi sismogrammi, sarebbe venuto a capo delle correzioni da applicarsi; ma i criteri coi quali esclude Ischia e Valle di Pompei, non hanno, a mio parere, certo fondamento: egli dice che, *considerata la distanza relativamente piccola dall'epicentro, può essere che la stessa incerta posizione di quest'ultimo basti a spiegare l'anomalia, tanto più che queste due località si trovano dalla stessa parte*. Anzitutto, un miriametro, quant'è la distanza fra Avezzano e l'epicentro da me considerato, non modificherebbe a sufficenza le velocità ricavate di 4210 e 5290; inoltre, anche Monte Cassino trovasi dalla stessa parte, cioè a SSE dell'epicentro, per cui, se la velocità fosse realmente uniforme, lo spostamento non potrebbe influire sensibilmente; invece, basando il calcolo, pei detti due punti, sulla sola stazione di Monte Cassino, si ottiene rispettivamente M 3909 e M 4800, cioè valori ancor più bassi. L'incoerenza sta invece nell'elemento di confronto: ed è sempre questa la sorte delle stazioni più vicine a quelle che si scelgono a fungere da epicentro, perchè il piccolo intervallo decorso, posto come divisore, per minime alterazioni crea enormi differenze nel quoziente. A questo modo le stesse tre località assunte per base (cioè: Montecassino, Rocca di Papa e Roma, si trovano in non lieve disaccordo, perchè le loro distanze di 64, 68 e 78, divise pei rispettivi intervalli di 6, 10 e 11 secondi sull'ora assegnata all'epicentro, dànno velocità di ch. 10·7, 6·8 e 7·1; anzi, Montecassino con Rocca di Papa darebbe, con ch. 4 in 48^s, la troppo esigua velocità di un solo chilometro al secondo.

In cambio, se con gli stessi valori calcolati dall'A., si ricalcolano gl'istanti per le rispettive località, compresevi le rigettate Ischia e Valle di Pompei, si ottiene:

	h m s	s		h m s	s		h m s	s
Montecassino .	7 52 52	— 2	Pola	7 53 26	+ 1	Moncalieri .	7 53 57	+ 9
Rocca di Papa	52 53	+ 4	Padova . .	53 35	+ 4	Graz	53 59	+ 0
Roma	52 54	+ 1	Trieste . .	53 36	+ 3	Vienna . . .	54 18	— 2
Ischia	53 4	+ 8	Treviso . .	53 37	— 6	Amburgo . .	55 33	0
Valle di Pompei	53 5	+ 5	Mileto . . .	53 37	+ 3	Granata. . .	56 4	— 20

ove le dette due stazioni non farebbero cattiva figura, nemmeno se l'anomalia si volesse intieramente ascrivere ad errori strumentali, perchè le minori divergenze tra quelle escluse si aggirano intorno al mezzo minuto. Ma anche per queste non sarebbe difficile il chiarire qualche possibile equivoco; p. es., per Siena (Osservanza), il dato direttamente comunicatomi è $7^h 53^m 52^s$, anzichè $7^h 53^m 0^s$; per Catania basta la differenza di parallelo con Avezzano a dare

42°2′ — 37° 30′ = 4° 32′ = km. 503 eccedenti di 3 km. i 500 che l'A. prende per base, mentre la distanza vera, tenuto conto della differenza di longitudine, è di km. 523.

Inoltre, il porre per base fondamentale di tutto il conteggio la media di tre dati con le incertezze ammesse dall'A., equivale a scaricare sulle stazioni contigue gli errori delle prime, per cui più corretto mi sembra assumere come incognite l'ora epicentrale (x) e la velocità (y) e, pur ammettendo la velocità uniforme, dare ugual peso a tutti i dati attendibili, trattandoli col metodo dei minimi quadrati. Posta l'equazione di condizione $x + dy = t$. e riservandomi di assumere ulteriori informazioni sui dati contestati dall'A., ho utilizzato intanto pel calcolo quelli da lui riconosciuti attendibili, aggiungendone altri avuti dalla cortesia dei dirigenti delle singole stazioni, ai quali porgo i miei ringraziamenti.

Così procedendo, ho ricavato:

A) $$x = 7^h52^m49^s822\,;\ y = 0.1193351\,;$$

e su questa base ho ricostruito i valori che si trovano nella colonna A dell'annesso quadro, coi rispettivi residui. Escludendo la stazione più lontana, Granata, per le ragioni che dirò più oltre, si ottiene:

B) $$x = 7^h52^m47^s284\,;\ y = 0.1269923\,;$$

ed i valori che se ne ricavano sono nella colonna B.

Dai valori di y si ricavano le velocità di km. 8·379 per A e 7·875 per B; tuttavia gl'istanti ricalcolati non differiscono di più d'un secondo fra la distanza di 139 km. (Napoli) e quella di 534 (Mineo); se per le più prossime la differenza è nulla o lieve, per le più lontane va rapidamente crescendo ed accenna all'incremento della velocità. Questa, per comodità di conteggio si potrà considerare uniforme per brevi distanze, ed io tale l'ho ritenuta in tutte le considerazioni che precedono: ma tale concetto va usato con parsimonia e sotto determinati punti di vista, non mai come legge precisa, che valga ad escludere dalla discussione dati che, appunto per le loro anomalie (quando non siano eccessive), possono guidare alla risoluzione di qualche problema.

In oggi è bene accertato che il primo impulso, dopo 13 minuti incirca, varca il cerchio massimo terrestre avente per polo l'epicentro, e, dopo altri 9 minuti, emerge agli antipodi; ciò dà rispettivamente velocità medie superficiali di 14 km., e 18 km. mentre la velocità iniziale non è che di 8 km. nei primi mille. La detta velocità è dunque rappresentabile con una curva che sul principio può identificarsi con la retta, analogamente al rapporto dell'arco con la corda, ma, a stretto rigore matematico, non è tale; e nel caso attuale ne troviamo già nel dato di Granata un chiaro indizio, che stazioni più lontane accentueranno viemmaggiormente.

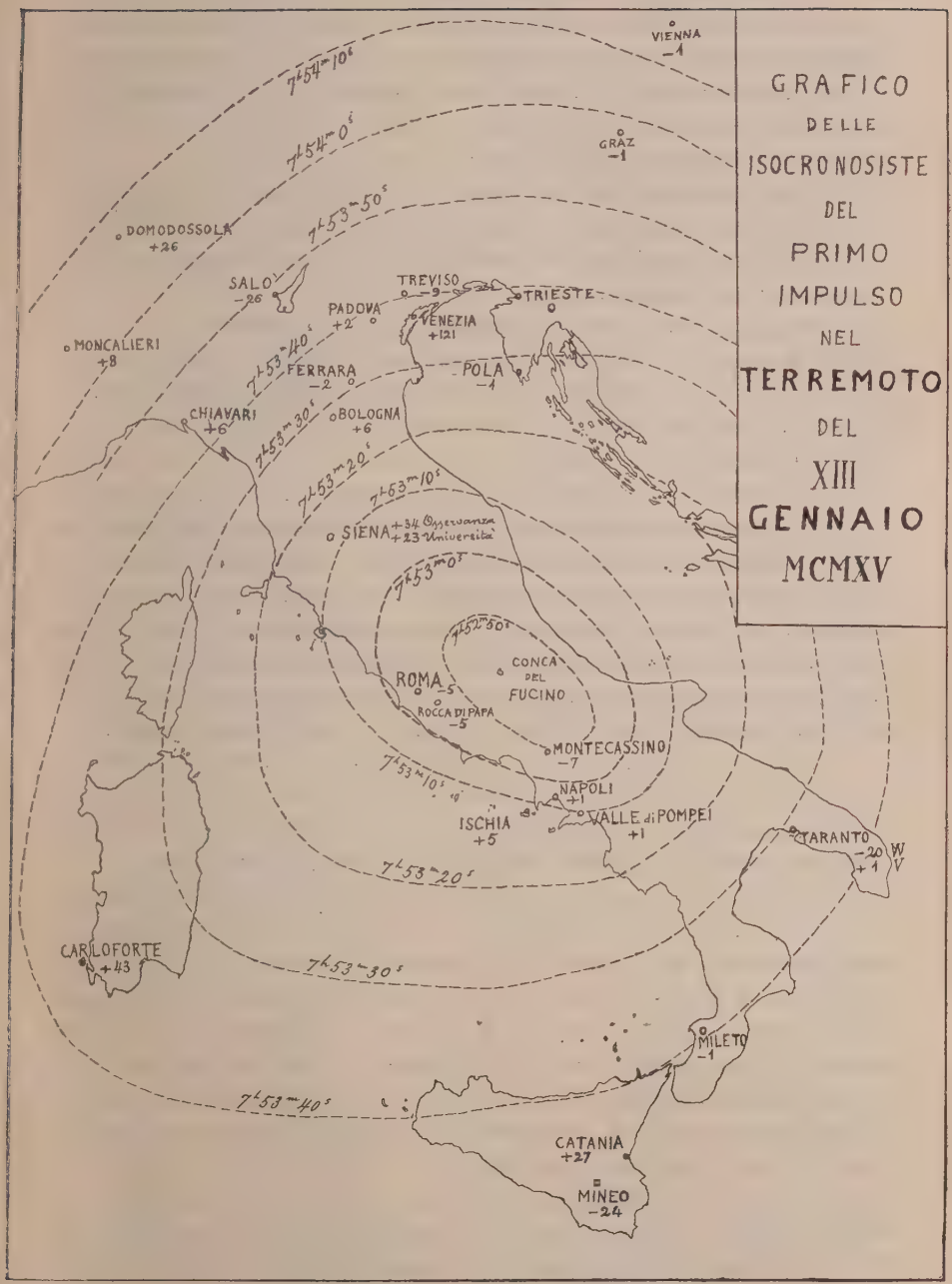


GRAFICO
DELLE
ISOCRONOSISTE
DEL
PRIMO
IMPULSO
NEL
TERREMOTO
DEL
XIII
GENNAIO
MCMXV
VIENNA −1
GRAZ −1
DOMODOSSOLA +26
SALO −26
TREVISO −9
TRIESTE
PADOVA +2
VENEZIA +121
MONCALIERI +8
FERRARA −2
POLA −1
CHIAVARI +6
BOLOGNA +6
SIENA +34 Osservanza +23 Università
ROMA −5
CONCA DEL FUCINO
ROCCA DI PAPA −5
MONTECASSINO −7
NAPOLI +1
ISCHIA +5
VALLE di POMPEI +1
TARANTO −20 +1
CARLOFORTE +43
MILETO −1
CATANIA +27
MINEO −24
7h54m10s
7h54m0s
7h53m50s
7h53m40s
7h53m30s
7h53m20s
7h53m10s
7h53m0s
7h52m50s
7h53m10s
7h53m20s
7h53m30s
7h53m40s

Ma se l'accrescimento della velocità è già tanto palese per grandi distanze, su cui i piccoli errori hanno un'influenza trascurabile, il problema pare più complesso nella zona epicentrale ove, sfuggendo il vero istante per mancanza di strumenti o per distruzione dei medesimi, bastano incertezze di qualche secondo a fornirci velocità eccessivamente alte od estremamente ridotte, mentre e queste e quelle possono avere la loro ragione naturale, in guisa che l'istante calcolato con l'ipotesi della velocità uniforme ha un significato più rappresentativo che reale.

Infine, fatta astrazione dall'accrescimento in questione, è tuttavia discutibile se la velocità sia la medesima in ogni direzione, non dovendosi dimenticare che la propagazione del moto sismico avviene attraverso solidi di varia natura, compattezza, elasticità ecc.

L'urto che giunge per primo in una determinata località ha certamente seguìto la via di più rapida propagazione, che può essere anche molto tortuosa; e da ciò può venir non poco deformata la figura di quel cerchio di geometrica precisione che viene presupposto da una velocità che sia la stessa in ogni direzione.

Man mano che la propagazione guadagna distanza, gli urti che giungono per primi hanno trovato la somma delle vie più sollecite, e tale somma su grandi distanze potrà anche pareggiarsi, o quasi, in qualunque direzione; ma su piccole distanze conviene tenere il debito conto della varia costituzione geologica, non già per discutere *a priori* il problema della velocità in base alle condizioni note della superficie, ma semplicemente per assumere un principio più consono allo scopo, quello del tracciamento grafico, quale è in uso per tutti i fenomeni meteorologici e magnetici e nella stessa geodinamica per le zone isosismiche. A titolo di semplice saggio, annetto un grafico in cui, oltre alle linee che chiamerò *isocronosiste*, ho indicato in cifre i secondi d'anticipazione (—) o di ritardo (+) rispetto agl'istanti calcolati sulla base della propagazione a velocità uniforme; tali residui, necessariamente, armonizzano, in generale, con la forma grossolanamente ellittica delle *isocronosiste*.

Ciò che ho detto per la velocità può valere per la direzione apparente della provenienza degli impulsi. La direzione ricavata di N 18° W è un pò più occidendale di Fucino: ed anzi, volendo sottilizzare, presenta fra le due stazioni di quest'isola un divario di 5° che va a convergere verso un punto situato nel mare presso alle foci del Volturno. Talchè credo che anche col continuo perfezionarsi dei mezzi di registrazione non si perverrà ad ottenere direttamente da questi la precisione che si presuppone ma, per avvicinarvisi, converrà studiare a fondo le anomalie.

Il grafico da me abbozzato rivela estese lacune, mentre, per raggiungere meglio gl'intenti prefissi, occorrerebbe anzitutto rendere confrontabili i dati delle varie stazioni, coi seguenti provvedimenti:

1) con una maggiore uniformità o paragonabilità dei mezzi e metodi d'osservazione;

2) con la sicurezza del funzionamento degli apparecchi;

3) con unità di criterio nell'analisi dei sismogrammi;

4) con la perfetta cognizione del tempo-campione.

Quest'ultimo punto, ch'è di capitale importanza, sarebbe completamente risoluto mediante la telegrafia afila, come già si praticava a Taranto, Montecassino e Firenze; tale mezzo, che non richiede le cognizioni astronomiche necessarie per trattare uno strumento dei passaggi o, quanto meno, per tracciare un'economica meridiana, sarebbe accessibile a tutti ed avrebbe il grandissimo, infallibile vantaggio della perfetta simultaneità in tutte le stazioni, mentre confronti meno diretti di quelli ora accennati traggono seco non poche incertezze.

Rispetto agli apparecchi è deplorevole che al vantaggio di registrare ogni minimo tremito del suolo vada inesorabilmente congiunto l'inconveniente del loro guastarsi o dello svisamento delle registrazioni per opera dei freni. Per tale ragione il prof. Agamennone ritiene che *non sia prudente, ai fini degli studii sismici, di fondare osservatorii di prim'ordine, e destinati anche ai terremoti mondiali, in regioni di alta sismicità*; ma in tal caso, con la frequenza che purtroppo i terremoti hanno dovunque in Italia, si dovrebbe rinunziare al possesso d'osservatorii di prim'ordine, mentre questi sono tanto utili sotto molteplici aspetti ed alla stessa sismometria, e tali rimarrebbero anche se si disinteressassero dei terremoti lontani. Nulla impedisce invece che, accanto al sismografo per terremoti lontani, vene siano altri adatti alla registrazione di forti terremoti vicini o locali senza il pericolo che falliscano, almeno fino a tanto che le diligenti ricerche ed i tentativi di chi studia esclusivamente il problema sismometrico non l'abbiano risolto con un apparecchio atto a registrare fedelmente ed indistintamente qualsiasi forma ed ampiezza di moto sismico.

ELENCO

delle registrazioni avute nell'isola d'Ischia dopo la grande perturbazione delle $7^h53^m13^s$ del 13 gennaio 1915, a tutto il mese stesso, in corrispondenza coi terremoti della Marsica.

Dì	Istante	Dì	Istante	Dì	Istante	Dì	Istante	Dì	Istante
	h m s		h m s		h m s		h m s		h m s
13	8 21.0	13	17 19.7 (1)	14	12 54.2	15	4 34.2	20	8 29.0
	8 28.4		17 44.6		14 16.7		5 52.3		20 3.0
	8 34.2		21 20.2 (1)		14 26.5		6 9.4	21	3 11.9
	8 59.9		22 11.7		15 35.9		8 56.0		13 29.8 (4)
	9 8.7		23 4.9		17 34.0		13 3 9		14 30.3
	9 23.7		23 21.7		17 55.8 (5)		14 1.9	22	21 15.3 (2)
	9 30.6		23 25.2		19 40.6		21 42.1	23	2 15.0
	9 35.2	14	2 10.9		21 9.0		23 2.1		9 30 0
	9 40.5		2 12 0		21 21.7	16	7 24.1		17 35.3
	10 9.1		2 50 2		21 24.5		13 17.0		17 49.3
	10 35 2		2 51.3 (2)	15	0 9.4	17	23 41.6	24	4 47.0
	10 56.0		3 43.1		1 10.2	18	6 41.2	25	7 46.0
	11 20.1 (1)		5 30.5		2 15.8		14 58.5	28	18 18.4 (2)
	14 58.5		8 17.7 (6)		2 45.1	19	11 45.1		
	17 5.0 (1)		9 16.0		4 58.0		21 17.6		

Le cifre tra parentesi indicano l'ampiezza massima in centimetri di registrazione al centuplo; la mancanza d'indicazione esprime ampiezze inferiori ad un centimetro.

Stazione	Istante dato	Distanza dal Fucino	A	B
	h m s		h m s	h m s
Montecassino	7 52 50	Ch. 57	7 52 57 — 7	7 52 54 — 4
Rocca di Papa	52 54 ± 3[s]	» 77	52 59 — 5	52 57 — 3
Roma	52 54 ± 2[s]	» 89	53 0 — 5	53 0 — 5
Napoli, Vomero	53 7	» 139	53 6 + 1	53 5 + 2
Ischia	53 12	» 143	53 7 + 5	53 6 + 6
Valle di Pompei	53 10	» 159	53 9 + 1	53 8 + 2
Siena, Osservanza *	53 40	» 233	53 17 + 23	53 17 + 23
Siena, Università *	53 52	» 234	53 18 + 34	53 17 + 35
Pola	53 27	» 321	53 28 — 1	53 29 — 2
Bologna	53 35	» 328	53 29 + 6	53 29 + 6
Taranto (Sismogr. Wiechert *)	53 11	» 347	53 31 — 20	53 31 — 20
Taranto (» Vicentini)	53 32		+ 1	+ 1
Ferrara	53 30 ± 15[s]	» 349	53 32 — 2	53 32 — 2
Venezia *	55 37	» 390	53 36 + 121	53 37 + 120
Padova	53 39	» 396	53 37 + 2	53 38 + 1
Trieste	53 39	» 407	53 39 0	53 39 0
Treviso	53 31	» 416	53 40 — 9	53 40 — 9
Chiavari	53 47	» 427	53 41 + 6	53 42 + 5
Mileto	53 40	» 429	53 41 - 1	53 42 — 2
Salò *	53 20	» 466	53 46 — 26	53 47 — 27
Catania *	54 18	» 513	53 51 + 27	53 52 + 26
Mineo *	53 30	» 534	53 54 — 24	53 55 — 25
Carloforte *	54 37	» 540	53 54 + 43	53 56 + 41
Moncalieri	54 7	» 578	53 59 + 8	54 1 + 6
Graz	53 59	» 587	54 0 — 1	54 2 — 3
Domodossola *	54 30	» 618	54 4 + 26	54 6 + 24
Vienna	54 16	» 729	54 17 — 1	54 20 — 4
Potsdam	55 15	» 1155	55 8 + 7	55 14 + 1
Amburgo	55 33	» 1311	55 27 + 6	55 34 — 1
Granata	55 44	» 1576	55 59 — 15	56 7 — 23

* Stazioni ommesse nel calcolo delle formole.

Chimica. — *L'acido cromisalicilico e i suoi derivati ammoniacali* (1). Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician (2).

In una Nota (3) precedente ho cercato d'interpretare la costituzione di alcuni salicilati complessi, avvicinandola a quella dei cromiossalati, cioè attribuendo all'acido salicilico lo stesso valore di coordinazione dell'acido ossalico.

$$\left[M_e^{n}\left(\begin{matrix}O\cdot C_6H_4\\ |\\ O\cdot CO\end{matrix}\right)_2\right]R_2 \qquad \left[Cr\left(\begin{matrix}O\cdot CO\\ |\\ O\cdot CO\end{matrix}\right)_3\right]R_3$$

salicilati complessi

$M''_c = C''_u, P''_d, V^{IV}O$

R = metallo alcalino o radicale ammonico

cromiossalati

Ho trovato una conferma di tale interpretazione nello studio dei composti descritti nella presente Nota.

Facendo reagire, in determinate condizioni, l'allume di cromo con un salicilato alcalino, ho ottenuto una sostanza polverosa giallastra, insolubile nell'acqua e nei comuni solventi organici, solubile nelle soluzioni degli idrati e dei carbonati alcalini, nell'ammoniaca e nella piridina.

I risultati che diede all'analisi concordano con la formula

$$\begin{matrix}&&OC_6H_4\\ &\diagup&|\\ Cr&-&OCO\\ &\diagdown&OC_6H_4\,COOH\,.\,3H_2O\end{matrix}$$

Si tratterebbe dunque di un acido cromisalicilico corrispondente ai ferri-

salicilati $\begin{matrix}&&OC_6H_4\\ Fe&-&OCO\\ &&OC_6H_4\,COOR\end{matrix}$ descritti recentemente da R. F. Weinland e A. Herz (4).

Speciale interesse presentano i derivati ammoniacali dell'acido cromisalicilico.

Dalle soluzioni di questo acido nell'ammoniaca concentrata si separa lentamente una sostanza roseo-violetta, cristallizzata in aghi finissimi micro-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale dell'Università di Ferrara.
(2) Rend. Accad. Lincei, XXIV, 1° sem., 435.
(3) Rend. Accad. Lincei XXIII, (1914), 2° sem., 408.
(4) Liebigs Ann. *400*, 219 (1913).

scopici, che all'analisi risulta come il prodotto della combinazione dell'acido cromisalicilico con tre molecole di ammoniaca:

$$\begin{matrix} & OC_6H_4 \\ Cr & — OCO \\ & OC_6H_4\,COOH\,.\,3NH_3\,.\,3H_2O \end{matrix}$$

Questo composto deve contenere una sola molecola di ammoniaca allo stato ammonico, perchè, trattata in soluzione con cloruro di potassio, cloruro di sodio, nitrato di argento, dà i seguenti sali cristallizzati che differiscono dalla sostanza di partenza, oltre che per l'acqua di cristallizzazione, anche per la sostituzione di un gruppo NH_4 con un atomo di potassio o di sodio o di argento:

$$\begin{matrix} & OC_6H_4 \\ Cr & — OCO \\ & OC_6H_4\,COOK\,.\,2NH_3\,.\,5H_2O \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & OC_6H_4 \\ Cr & — OCO \\ & OC_6H_4\,COONa\,.\,2NH_3\,.\,6H_2O \end{matrix}$$

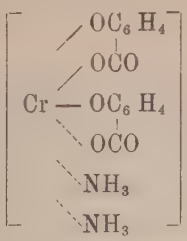
$$\begin{matrix} & OC_6H_4 \\ Cr & — OCO \\ & OC_6H_4\,COO\,Ag\,.\,2NH_3 \end{matrix}$$

Esiste dunque in tutti questi derivati ammoniacali un complesso formato da un atomo di cromo, due molecole di acido salicilico e due molecole di ammoniaca, che rimane inalterato nelle reazioni di doppio scambio. Ciò è spiegabile, colla teoria della coordinazione, ammettendo che due molecole di ammoniaca siano legate all'atomo di cromo mediante valenze secondarie, e attribuendo a detti composti la formula generale:

$$\left[\begin{matrix} & OC_6H_4 \\ & OCO \\ Cr & — OC_6H_4\,COO \\ & NH_3 \\ & NH_3 \end{matrix}\right] R\,.$$

Ma siccome il numero di coordinazione del cromo è sei, e il cromo dà di regola composti coordinativamente saturi, e d'altra parte il sale di argento è anidro e quindi l'acqua contenuta negli altri sali non fa parte del-

l'anione complesso, è forza ammettere che una valenza secondaria leghi l'atomo di cromo al carbossile impegnato col metallo alcalino, com'è espresso dalla formula

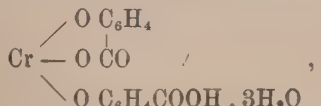


I derivati ammoniacali dell'acido cromisalicilico appartengono quindi al tipo dei tetracidodiamminosali, e, secondo la nomenclatura proposta da A. Werner, sono da chiamarsi disalicilato-diammin-cromiati. Essi corrispondono perfettamente ai diossalo-diammin-cromiati $\left[Cr \begin{matrix} (C_2O_4)_2 \\ (NH_3)_2 \end{matrix} \right] R$ descritti da Clève (1) e da Pfeiffer e Basci (2), e ai diossalo-diammin-cobaltiati $\left[Co \begin{matrix} (C_2O_4)_2 \\ (NH_3)_2 \end{matrix} \right] R$ descritti da Sorensen (3).

Da tale analogia viene confermata l'equivalenza, dal punto di vista della coordinazione, dell'acido salicilico con l'acido ossalico.

Trattando i disalicilato-diammin-cromiati con acidi diluiti, si mette in libertà l'acido $\left[Cr \begin{matrix} \left(C_6H_4 < \begin{matrix} O \\ COO \end{matrix} \right)_2 \\ (NH_3)_2 \end{matrix} \right] H$ insolubile in acqua. Lo stesso acido può venir ottenuto anche scaldando a 100° il suo sale di ammonio. A questa temperatura, viene eliminata non soltanto tutta l'acqua di cristallizzazione, ma anche, per dissociazione termica, l'ammoniaca contenuta allo stato ammonico.

Quanto alla costituzione della sostanza dalla quale, con ammoniaca, si preparano i disalicilato-diammin-cromiati e che in questa Nota chiamo acido cromisalicilico per brevità e in considerazione della sua solubilità nei liquidi alcalini, non mi è ancora possibile d'indicarla con sicurezza. I risultati analitici concordano tanto con la formula



(1) K. Vet. Akad. Handl. *6*, n. 4, pag. 24 (1865).
(2) Liebigs. Ann. 346_{48} (1906).
(3) Gmelin-Kraut Friedheim Handb., Anorg. Ch. V_{1509}.

quanto con la formula

$$\left[{}^{(C_6H_4<^{OH}_{COO})_6}_{Cr_3(OH)_2} \right] \left[Cr(C_6H_4<^{O}_{COO})_2 \right] \cdot 10\,H_2O$$

secondo la quale si tratterrebbe della combinazione di una molecola di acido cromisalicilico con una di esasalicilato-tricromibase. Anche un composto di questo tipo è stato descritto per il ferro da R. F. Weinland e A. Herz (loc. cit.). Forse porterà luce sull'argomento lo studio dei composti che l'« acido cromisalicilico » forma colla soda e colla potassa. Essi sono verdi, estremamente solubili e difficilmente cristallizzabili. Io non ho ancora potuto ottenerli allo stato di purezza.

Parte sperimentale

Acido cromisalicilico.

Facendo reagire in soluzione e a caldo un sale di cromo, p. es. allume di cromo e potassio con salicilato alcalino, nel rapporto di tre molecole di salicilato per un atomo di cromo, si ottiene un prodotto verdastro, insolubile nell'acqua, che a caldo ha l'aspetto di una massa molle e vischiosa, e a freddo diventa friabile. In questo prodotto sono contenute almeno due sostanze, perchè, trattandolo con alcool o, meglio, con acetone, si scioglie una sostanza verde e resta una polvere giallastra insolubile in alcool e nei comuni solventi organici. Questa polvere giallastra è l'acido cromisalicilico. Si scioglie nelle soluzioni degli idrati e dei carbonati alcalini con colorazione verde; nell'ammoniaca e nella piridina, con colorazione violetta.

L'acido cromisalicilico è quasi l'unico prodotto della reazione tra l'allume di cromo e i salicilati alcalini quando si operi nelle condizioni seguenti. In una capsula di porcellana si sciolgono gr. 10 di allume di cromo in 250 cc. di acqua: si scalda all'ebullizione e poi si aggiungono gr. 8 di acido salicico e, a goccia a goccia, una soluzione di 3 gr. di carbonato sodico in poca acqua, sempre agitando il liquido e mantenendo all'ebullizione. Si deposita una polvere gialla che viene separata per filtrazione alla pompa dal liquido, e lavato prima con acqua bollente poi con alcool più volte.

All'analisi diede i seguenti risultati:

	Calcolato per $Cr(C_7H_4<^{O}_{COO})_2 H . 3H_2O$	Trovato
Cr	13,72	13,60 - 13,71 - 13,77
C	44,31	44,13
H	3,99	4,08

Disalicilato-diammin-cromiato di ammonio.

$$\left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] NH_4 . 3H_2O .$$

Gr. 40 di acido cromisalicilico vengono sciolti, a caldo, in 200 cc. di ammoniaca al 15 % circa: si ottiene un liquido violetto, dal quale, per raffreddamento, cristallizza una sostanza rosea in aghi finissimi microscopici. Dall'acqua madre, continua, per circa una settimana, a separarsi sempre nuovo prodotto. In tutto se ne ottengono circa 30 grammi.

	Calcolato per $\left[Cr \begin{pmatrix} (C_7H_4O_3)_2 \\ (NH_3)_2 \end{pmatrix} \right] NH_4 . 3H_2O$	Trovato
Cr	12,10	12,31 - 12,25
N	9,77	9,70
C	39,05	38 94
H	5,62	5,56

Il disalicilato - diammin - cromiato di ammonio è poco solubile in acqua. Le sue soluzioni, appena preparate, sono violette ; dopo alcun tempo, e specialmente a caldo, diventano verdastre, ma ritornano violette per aggiunta di ammoniaca. La solubilità di questo composto viene diminuita dalla presenza di un sale di ammonio. Se si aggiunge cloruro di ammonio in sostanza ad una soluzione ammoniacale del composto, questo si separa in gran parte dalla soluzione allo stato cristallino.

Disalicilato-diammin-cromiato di potassio.

$$\left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] K . 5H_2O$$

Se ad una soluzione, abbastanza concentrata e fortemente ammoniacale, del disalicilato - diammin - cromiato di ammonio, si aggiunge una soluzione satura di cloruro di potassio, si ha tosto un precipitato roseo caseoso che a primo aspetto sembra amorfo ma che, esaminato al microscopio, risulta formato di aghetti finissimi.

	Calcolato per $\left[Cr \begin{pmatrix} (C_7H_4O_3)_2 \\ (NH_3)_2 \end{pmatrix} \right] K . 5H_2O$	Trovato
Cr	10,67	10,58 - 10,68
K	8,02	7,61 - 7,87
C	34,48	34,34
H	4,96	4,75
N	5,75	5,56

Disalicilato-diammin-cromiato di sodio.

$$\left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] Na \,.\, 6H_2O$$

Questo sale rassomiglia a quello di potassio e a quello di ammonio, e si ottiene trattando quest'ultimo in soluzione ammoniacale con cloruro o con solfato di sodio.

	Calcolato	Trovato
Cr	10,63	10,73
Na	4,70	4,49
C	34,34	34,60
H	5,36	5,48
N	5,73	5,87

Disalicilato-diammin-cromiato di argento.

$$\left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] Ag.$$

Gr. 5 del sale di ammonio vennero fatti digerire per alcun tempo in una soluzione di nitrato di argento al 2 %. Il sale di ammonio, mantenendo apparentemente inalterato il suo aspetto cristallino, si trasforma nel sale di argento. Il prodotto sottoposto all'analisi era stato seccato nel vuoto su P_2O_5 sino a peso costante.

	Calcolato	Trovato
Cr	11,16	10,90
Ag	23,15	23,27

$$\text{Acido} \left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] H.$$

Le soluzioni dei disalicilati - diammin - cromiati alcalini, per aggiunta di acidi diluiti, dànno un precipitato roseo-pallido che assai difficilmente si può separare per filtrazione. Lo si ottiene in polvere meno fine trattando in un mortaio il sale di ammonio solido colla quantità calcolata di acido solforico diluito, o, meglio, scaldando il sale di ammonio in stufa a 100° sino a peso costante.

È una polvere rosea, insolubile in acqua, solubile, con colorazione violetta, nell'ammoniaca diluita.

	Calcolato	Trovato
Cr	14,48	14,39
C	46,78	46,52
H	4,21	4,36
N	7,81	7,47

Chimica-fisica. — *Elettrolisi di acidi organici bicarbossilici: acido acetilenbicarbonico* (1). Nota di B. L. Vanzetti, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una serie di lavori, i cui risultati furono pubblicati parecchi anni or sono (2), ho potuto dimostrare come la decomposizione di acidi organici bicarbossilici, mediante la corrente elettrica, nella soluzione dei loro sali, è assai varia e complessa, perchè varie e complesse sono le reazioni secondarie che possono aver luogo nello spazio anodico, nel momento in cui la molecola acida, giunta all'anodo, si scarica rimanendo esposta, sia pure per breve tempo, all'azione dell'ossigeno nascente.

Il più importante risultato di queste ricerche si può riassumere così: la formazione di idrocarburi, segnalata da Kolbe e studiata da Kekulé, per gli acidi succinico, fumarico e maleico, ha luogo in grado sempre minore per gli acidi a maggiore numero di atomi di carbonio. Ciò sembra essere in relazione col fatto che per questi acidi, più deboli, si verifica esclusivamente, o quasi, la dissociazione binaria, mentre per i primi termini, più energici, l'andamento della costante lascia intravedere una parziale dissociazione terniaria.

Allo studio dei principali acidi della serie satura e della serie etilenica si aggiunse, per iniziativa di G. Bruni e per opera di A. Borgo, quello dell'*acido acetilenbicarbonico*, primo e più importante termine della serie a triplo legame. Alcuni risultati preliminari furono esposti brevemente al Congresso delle scienze tenutosi in Padova nel 1909.

Ricordo qui che l'A., elettrolizzando soluzioni al 20 % di acido, o di sale sodico, con, o senza diaframma, usando una corrente di circa 100 ampères per dm.^{2} e tenendo raffreddato ed agitato il liquido, notò da prima imbrunimento del liquido, che egli interpreta come dovuta a formazione di carbone libero, in seguito alla scomposizione ternaria

$$n\,(\cdot OOC\cdot C \vdots C\cdot COO\cdot)'' \longrightarrow (\cdot C \vdots C\cdot)n + n\,CO_2;$$

formazione di piccole quantità di un idrocarburo — non identificato — ed in un caso formazione, all'anodo, di una piccola quantità di acido mellitico.

Si credette opportuno di rifare alcune prove su scala un po' più vasta e variando un poco le condizioni dell'esperienza. Nello stesso laboratorio, con l'aiuto diligente del laureando G. B. Fasoli, preparai dunque una rilevante quantità dell'acido in questione, seguendo le prescrizioni di Ad.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova.

(2) Questi Rend. XIII. 2. 112; XV. 1. 574; XVI. 2. 79 e 139; XVII. 2. 331; Gazz. chim. it. XXXIV. 2. 504; XXXVII. 2. 338 e 386; XXXIX. 1. 46.

Bayer (1), e curando soprattutto la purificazione del prodotto, la cui facile alterabilità può giustificare il sospetto di parziali trasformazioni.

Elettrolisi senza sètto poroso di una soluzione al 25 % di sale bipotassico, eseguita con una corrente della densità 50 amp. × dm.^{2}; catodo di rete di platino cilindrica, e anodo interno di spirale di platino di 1 mm. di diametro. Voltaggio ai morsetti 4,3 ÷ 3,8 volts. L'esperienza fu condotta in modo che il termometro immerso nell'interno della spirale anodica non segnasse più di 17° C.

I gas che si svolgevano furono raccolti, al tubo d'uscita della cellula elettrolitica, direttamente con la buvetta di Hempel, o conservati in piccoli gazometri su acqua salata.

L'elettrolisi fu protratta per 16,6 ore (circa 1000 minuti), cioè sino alla scomparsa dell'ossido di carbonio dalla miscela gasosa. La seguente tabella riassume chiaramente l'andamento della scomposizione:

d = Adm.^{2}	25	25	50	50	50	50	50	50	50	50
t'	10′	280′	400′	525′	585′	600′	635′	720′	750′	1000′
Idroc. n. sat. %	0 0	2.5	2 9	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	—
CO_2 »	12.4	12.5	13.1	8.6	8.1	8 0	7.6	6.4	6.5	—
CO »	28.0	4.8	4.8	23.9	26.1	26.1	1.6	0.5	0.0	—
O_2 »	0 0	16.2	13 7	0.0	0.0	0.0	25.8	27.1	26.5	—
Totale %	40.4	36.0	34.5	33.0	34.2	34.1	35.0	34.0	33.0	—

La differenza a 100, non sempre determinata, idrogeno; nessun idrocarburo saturo.

L'anidride carbonica, dopo le prime ore di elettrolisi, si svolge in quantità pressochè costante. L'ossido di carbonio, che si presenta da principio in grandi quantità, diminuisce rapidamente, per aumentare in su l'ottava ora, precipitando, dopo la decima, rapidamente a zero.

Con le variazioni nel contenuto in ossido di carbonio, si accordano le variazioni inverse nelle quantità di ossigeno svolto, così che la somma di questi due componenti si mantiene quasi costante.

La differenza tra questo andamento, diremo così, saltuario, e quello regolare osservato da A. Borgo, è dovuta probabilmente al fatto che, contrariamente a quanto egli aveva fatto, nelle nostre esperienze evitammo di proposito l'agitazione del liquido.

Si nota poi la formazione di una piccola quantità di idrocarburo non saturo, assorbibile dall'acqua di bromo, come dall'acido solforico fumante,

(1) Ber. d. d. chem. Ges. *18*, pagg. 677 e 2269.

la cui comparsa (nelle prime ore) pare in rapporto con la diminuzione dell'ossido di carbonio.

Identificazione dell'idrocarburo non saturo. — Tutta la miscela gasosa raccolta nei gasometri (circa 17 litri), fu fatta passare a traverso una serie di apparecchini contenenti i reattivi adatti all'assorbimento dei componenti CO_2, O_2, CO; e il gas rimanente veniva condotto in una soluzione ammoniacale di cloruro rameoso di recente preparazione. Si iniziò tosto la formazione di un precipitato leggero rosso-sangue, che raccolto, lavato ed essiccato (durante l'essiccamento volge al nero), fu sottoposto ad alcune prove. Una piccola quantità fu messa su una lamina metallica, a pochi centimetri da una eguale quantità di acetiluro di rame ottenuto per azione di acetilene puro sulla stessa soluzione rameosa, e si procedette al riscaldamento lento ed eguale della lamina metallica mediante una lampada Bunsen, la cui fiammella ne lambiva una estremità egualmente lontana dai due campioncini. Raggiunta la temperatura di esplosione, si videro i due prodotti esplodere nello stesso istante. La prova fu ripetuta più volte, con uguale risultato: ed io la ritengo altrettanto concludente quanto una determinazione quantitativa dei componenti.

Si forma dunque dell'*acetilene*, per quanto in piccola quantità. Restava da sapersi dove e in seguito a quale reazione.

Eseguimmo una *elettrolisi in cellala, con gli spazii divisi da parete porosa*, al fine di poter raccogliere ed esaminare separatamente gas anodici e gas catodici ($d = 50$ amp. dm.^{2}; tensione ai morsetti $7 \div 5$ volts; temper. del liquido anodico 20-25°). La celluta elettrolitica scelta per l'esperienza era necessariamente maggiore per far posto al cilindro di porcellana porosa, e i due spazî ben divisi e muniti di un tubo di uscita ciascuno. Il gas proveniente dall'anodo, dopo essere stato guidato a traverso apparecchini per l'assorbimento della CO_2, dell'O_2 e del CO, doveva attraversare una soluzione ammoniacale di cloruro rameoso. I gas catodici venivano senz'altro condotti sopra una soluzione di questo reattivo. Si potè constatare che lo *acetilene proviene dall'anodo*, perchè solo i gas anodici provocarono una precipitazione di acetiluro di rame,

Questo composto, lavato ed essiccato, fu riconosciuto con la prova di confronto dianzi descritta.

Quanto all'andamento generale dell'elettrolisi, esso si può considerare analogo a quello precedentemente descritto. L'analisi dei gas anodici dà:

dopo $^1/_2$ ora: CO_2 60 %; idr. n. sat. 1.1 % O_2 30 %; CO 9,0 % circa
» 9 ore: » 45 » » » 0,0 » » 0,0 » » 55 » »
» 12 » quasi esclusivamente ossigeno.

Interessante è il fatto che, dopo un certo numero di ore, l'acido acetilenbicarbonico è completamente scomparso, e la elettrolisi va a carico del-

l'idrato alcalino rimasto e del carbonato formatosi durante il processo di decomposizione.

Abbiamo cercato anche l'acido mellitico, sospendendo la elettrolisi del sale qualche ora dopo l'inizio; ma non ci è mai stato possibile di svelarne la presenza. Potemmo isolare, sì, piccole quantità di acido fumarico: ma acido mellitico, mai.

Elettrolisi dell'acido acetilenbicarbonico puro in soluzione al 10 %. Abbiamo adoperato per questa prova un prodotto ulteriormente purificato, allo scopo soprattutto di stabilire la provenienza dell'acetilene: d = 50 amp. × dm.²; tensione 2,5 volts temper. 7° circa. Senza parete porosa e senza agitazione. Il liquido perde rapidamente la leggerissima colorazione ambracea, per diventare perfettamente e permanentemente incoloro.

L'analisi del gas misto diede:

dopo 1 ora: CO_2 10,0 %; idroc. n. sat. tracce; O_2 22,2 %; CO 4,0 %
» 4 ore: » 8,2 » » » » » 24,8 » » 2,0 »

Il gas, eliminati come il solito i componenti ossigenati, fu condotto attraverso la soluzione ammoniacale di cloruro rameoso; solo dopo lungo tempo si potè notare la formazione di una piccolissima quantità di acetiluro.

Sulla formazione dell'acetilene si possono fare ipotesi diverse. La più semplice e verosimile è che esso provenga dalla decomposizione anodica di piccole quantità di acido fumarico (o maleico), originatasi durante la preparazione dell'acido acetilenbicarbonico stesso, escluso un processo di riduzione elettrolitica.

Data la formazione, costantemente verificata, di acido fumarico nella preparazione di acido acetilenbicarbonico, si capisce come ne sia estremamente difficile l'allontanamento completo, tanto più che verosimilmente essi formeranno soluzioni solide (1). Abbiamo però notato che, in seguito ad una accurata purificazione dell'acido acetilenbicarbonico, la quantità di acetilene svoltosi all'anodo diminuisce fin quasi a scomparire. Io credo, perciò, che si debba escludere un'origine diretta di questo idrocarburo dall'acido acetilenbicarbonico.

La scomposizione elettrolitica dell'acido acetilenbicarbonico puro e del suo sale potassico apparisce completa, nelle condizioni descritte, con separazione dei due gruppi COO carbossilici e con ossidazione a CO del carbonio centrale della molecola. Il processo di ossidazione della molecola organica procede con una certa velocità (specialmente se si evita l'agitazione, che impedisce l'accumulo dell'acido intorno all'anodo), per la considerevole conduttività dell'acido e del suo sale e per la conseguente azione dell'ossigeno nascente su atomi di carbonio non saturi e dotati quindi di una forte reagibilità.

(1) Cfr. G. Bruni, *Feste Lösungen u. Isomorphismus*, Lepzig, 1908, pagg. 60 e 72-73.

Una tale ossidazione è, d'altra parte, più comprensibile che non una separazione di carbonato libero, la quale, verosimilmente, richiederebbe la concorrenza di un numero grande di resti (· C ⋮ C ·) — ammesso che possa esistere, durante un tempo finito, questo aggruppamento libero — perchè questa separazione, che a prima giunta può sembrare della massima semplicità, dipende forse da una reazione di grado superiore.

Non abbiamo mai potuto constatare la formazione di qualsiasi sospensione incolora, o colorata, che potesse far nascere il sospetto della presenza di carbone colloidale; nessun effetto Tyndall si manifestò mai nel liquido prelevato dallo spazio anodico, e negative furono anche le ricerche all'ultramicroscopio a fessura (Zsigmondy-Siedentopf).

La spiegazione dell'effetto osservato da A. Borgo si può forse trovare nella formazione di corpi complessi contenenti il gruppo carbonilico (analoghi ai corpi umici), che la forte agitazione del liquido usata dall'A. avrebbe strappato alla ulteriore ossidazione totale.

Per quanto riguarda l'acido mellitico, riscontrato una volta dallo stesso operatore, nessuna traccia nelle nostre esperienze. È quindi probabile che la piccola quantità di questo acido trovata da Borgo fosse già presente nell'acido acetilenbicarbonico da lui impiegato, formatosi verosimilmente per polimerizzazione di questo durante la sua preparazione. Ricordiamo, a questo proposito, che l'acido propiolico dà, per polimierizzazione alla luce, l'acido trimesinico.

Meglio potrebbe pensarsi — come conseguenza di una dissociazione binaria — alla sintesi anodica di acidi contenenti più volte il triplo legame (diacetilenbicarbonico...): si tratterebbe però sempre di corpi assai poco stabili, sui quali l'ossigeno anodico avrebbe facile presa.

In ultima analisi, la decomposizione elettrolitica dell'acido acetilenbicarbonico si presenta come molto semplice e chiara, più chiara forse di quante sono state studiate finora in questo campo, e quasi paragonabile a quella dell'acido ossalico.

Ho in corso esperienze sull'elettrolisi dell'*acido fenilpropiolico*.

Chimica-fisica. — *Conduttività elettrica di miscele di sali fusi* [1]. Nota di C. Sandonnini, presentata dal Socio Giacomo Ciamician.

La conduttività elettriche di molti sali fusi venne accuratamente determinata specialmente da Kohlrausch [2], Lorenz [3], Arndt [4], Tubandt [5], Goodwin [6], ed Aten [7]. Per quanto riguarda la conduttività di miscele di sali fusi, all'infuori di ricerche isolate di Kohlrausch, i primi studii abbastanza estesi si debbono a Bouty [8], a Foussereau [9], e Poincaré [10], e secondo quest'ultimo autore i valori delle conduttività delle miscele di sali fusi sarebbero calcolabili con la regola dei miscugli. In seguito, Lorenz e Kalmus (loc. cit.) trovarono che le conduttività delle miscele fuse di cloruro di potassio e di cloruro di piombo sono di molto inferiori a quelle calcolate, e tali deviazioni attribuirono alla formazione di complessi. Goodwin e Mailey [11], in una assai accurata serie di ricerche, studiarono le proprietà chimico-fisiche di alcune miscele di sali fusi; come tipo scelsero quelle di nitrato sodico e nitrato potassico che fondono a temperatura relativamente bassa e nelle quali è da escludere la formazione di complessi tra i due sali, e trovarono che le conduttività sono sempre inferiori a quelle calcolate: non si avrebbe quindi una conferma della Poincaré. Inoltre essi trovarono che la fluidità di tali miscele è superiore a quella calcolata: questo dovrebbe quindi produrre un aumento di mobilità ioniche e, conseguentemente, di conduttività, anzichè una diminuzione; e pertanto la diminuzione osservata venne attribuita a retrocessione di ionizzazione per la presenza di uno ione in comune.

Grazie alle larghissime applicazioni che ha avuto negli ultimi anni l'analisi termica, siamo ora in grado di conoscere esattamente il com-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) Wied. Ann. *17*, 642 (1882).

(3) Elektrochemie geschmolzener Salze (1909).

(4) Zeit. f. Elektroch., *12*, 337 (1906); *14*, 662-665 (1907). Ber. d. d. chem. Gesellsch. 2937 (1907).

(5) Zeit. f. phys. Chem. *87*, 513 (1914).

(6) Phys. Rewiew, *25*, 469 (1907); *26*, 28 (1908).

(7) Zeit. f. phys. Chem. *66*, 641 (1909); *73*, 574, 624 (1910); *78*, 1 (1912).

(8) Ann. chim. et phys. [6] *5*, 24, pag. 317 (1885).

(9) Ann. chim. et phys. [6] *17*, 24, pag. 52 (1899).

(10) Ann. chim. et phys. [6] *21*, 289 (1890).

(11) Phys. Rewiew, *26*, 28 (1908).

portamento di molte coppie di sali doppî. Con la guida di questi dati ho intrapreso una serie sistematica di ricerche per vedere se dalle determinazioni di conduttività elettrica si possono avere dati caratteristici dei varii casi. Inoltre ho esteso le mie ricerche anche allo stato solido, per vedere quale influenza eserciti l'aggregato cristallino.

In questa mia prima Nota espongo i valori di conduttività di alcune miscele di sali con punti di fusione relativamente bassi. Per le misure delle conduttività usai il solito dispositivo di Kohlrausch; la maggiore difficoltà fu incontrata nella scelta del tipo di cella.

Come è noto, i sali allo stato di fusione sono generalmente ottimi conduttori: quindi fu necessario di scegliere una cella la quale avesse una forte resistenza e che tuttavia potesse essere portata ad alta temperatura ed essere accuratamente pulita per potere poi servire ad una lunga serie di misure. Mentrechè, per misure su sali di valori molto diversi in conduttività si presta molto bene quella proposta da Lorenz, per sali aventi conduttività nello stesso ordine di grandezza si presta assai meglio quella proposta da Arndt [1], usata poi con qualche modificazione da Tubandt e da Aten (loc. cit.), e che in sostanza è quella di Kohlrausch per la determinazione del potere conduttore di elettroliti forti. Essa consiste in un tubo ad U più o meno strozzato nella parte inferiore, il quale porta nella parte superiore più larga delle due branche gli etettrodi.

Per le misure di potere conduttore allo stato fuso usai sempre questo tipo di cella: il diametro della parte inferiore strozzata variava da 2 a 3 mm.; la larghezza da 7 a 10 cm., secondo che era conveniente l'impiego di una cella più o meno resistente.

La parte superiore delle branche del tubo ad U aveva un diametro di 12 mm. e un'altezza di circa 2 cm., e conteneva elettrodi cilindrici di platino lucido di grosso spessore, di circa 1 centimetro di diametro e di 7 millimetri di altezza. A questi erano saldati due fili di platino per tutto lo spazio sottoposto ad alta temperatura, che venivano poi convenientemunte inseriti nel dispositivo per la determinazione delle conduttività.

Per la misura della capacità di resistenza mi son servito di una soluzione normale di cloruro potassico purissimo precipitato dall'alcool, e di una soluzione di acido solforico di peso specifico 1,223, a 18°, già usata da Aten e da Goodwin per avere dati di controllo; ed ottenni risultati concordanti. Fu curato che tanto nelle misure di capacità di resistenza come pure nelle misure di conduttività il liquido giungesse sempre alla medesima altezza sopra gli elettrodi, cioè di 4-5 millimetri. Durante le misure gli elettrodi vennero scossi e girati entro le branche che li contenevano,

[1] Zeit. f. Elektroch., *12*, 337 (1906).

senza che una sensibile influenza potesse venire notata nelle letture del ponte.

Le celle erano di quarzo. Usando questo materiale, dato il suo piccolo coefficiente di dilatazione ($5{,}4 \cdot 10^{-7}$) [1], è da tralasciare la correzione che si dovrebbe portare nel calcolo alla temperatura di esperienza, dovuta ad una eventuale variazione delle dimensioni della cella sino a temperature relativamente alte.

Così pure non venne preso in considerazione il potere conduttore della cella stessa, poichè esso è assolutamente trascurabile rispetto a quello dei sali usati.

Non è invece trascurabile la resistenza che offrono le parti metalliche che vengono sottoposte ad alta temperatura; essa venne quindi misurata alle varie temperature, alle quali vennero poi eseguite misure di conduttività, e ne fu tenuto conto nel calcolo della capacità di resistenza della cella e nel calcolo della conduttività.

Le miscele erano mantenute allo stato fuso, in un largo forno a resistenza elettrica in atmosfera di azoto. La misura delle temperature veniva fatta con un termoelemento Pt — Pt + Rh accuratamente controllato, la saldatura del quale era immersa in un tubetto contenente la stessa miscela che era contenuta nella cella di conduttività e posto tra le due branche di quest'ultima.

La corrente usata per il riscaldamento era quella stradale, che veniva regolata con un sistema di reostati con raffreddamento ad acqua, e quindi di resistenza praticamente costante, dimodochè, una volta portato il forno alla temperatura voluta, si poteva ottenere una buona costanza di temperatura.

In ogni determinazione questa venne mantenuta costante per almeno quindici minuti, tempo trovato sufficiente per avere la certezza che tutte le parti della cella di conduttività ed il tubicino che conteneva la saldatura del termoelemento fossero alla stessa temperatura voluta.

Il riempimento della cella venne fatto con ogni cura, per evitare l'occlusione di bollicine di aria nella massa fusa dei sali.

Nella tabella seguente sono raccolti i valori di conduttività, espressi in ohms reciproci, dei singoli sali puri usati, quali risultarono dalle mie esperienze, posti in confronto a quelli, trovati da altri esperimentatori, alla stessa temperatura di 500°.

		Tubandt	Arndt	Lorenz
$Pb\,Cl_2$	1,472	— —	— —	1,411
$Pb\,Br_2$	1,030	— —	— —	— —
Ag Cl	3,654	3,910	— —	— —
Ag Br	2,920	2,920	3,020	— —
Tl Cl	1,224	1,332	— —	— —

[1] Holborn e Henning, Ann. der Physik [4] *10*, 446 (1903).

I punti di fusione dei sali usati furono i seguenti:

$PbCl_2$	495°	Ag Cl	455°	Tl Cl	429°
$PbBr_2$	368°	Ag Br	422°		

A mio parere, le differenze tra i valori di conduttività dei singoli sali, oltrechè ad impurezze, sono da attribuire a piccole variazioni nelle determinazioni della temperatura. I valori dati tanto per i sali quanto per le loro miscele rappresentano il valore medio di un buon numero di determinazioni fatte separatamente.

Nelle tabelle seguenti sono raccolti i valori ottenuti per i tre sistemi sperimentati $PbCl_2$-$PbBr_2$; Ag Cl - Ag Br; Tl Cl - Ag Cl.

Ognuno dei valori singoli portati in queste tabelle, è la media di almeno tre letture differenti, ottenute con diverse resistenze di confronto; frequentemente furono eseguite diverse serie di misure su miscele preparate a parte.

Nelle tabelle seguenti, oltre alla composizione in peso ed in molecole percento delle varie miscele e ai valori di conduttività specifica realmente osservati, sono ancora riportati i valori calcolati colla regola dei miscugli in base alla composizione in molecole, le differenze assolute tra i due valori e quelle percentuali sui valori calcolati.

Cloruro e bromuro di piombo. — Ricordo come dal diagramma di solidificazione del sistema cloruro-bromuro di piombo risulti la formazione di cristalli misti del primo tipo di Roozeboom (1), e come sia da escludere la formazione di sali doppî tra i due sali e quindi, con ogni verosimiglianza, anche l'esistenza di complessi nel fuso.

Dai valori raccolti nella prima tabella risulta come le conduttività trovate siano sempre leggermente inferiori a quelle calcolate con la regola dei miscugli; le differenze raggiungono il 4 % per la miscela equimolecolare.

TABELLA 1ª.

$PbCl_2 + PbBr_2$

Composizione della miscela		K trovato $t = 500°$	K calcolato	$K_{calc.}$-$K_{trov.}$	Differenze %
% in peso $PbCl_2$	molecole % $PbCl_2$				
0.00	0.0	1 030	—	—	—
7.76	10.0	1.059	1.072	0.013	1.22
20.15	25.0	1.108	1.140	0.032	2.80
43.09	50.0	1.201	1.251	0.050	4.00
69.44	75.0	1.310	1.361	0.051	3.75
87.21	90.0	1.400	1.429	0.029	2 00
100.00	100.0	1.472	—	—	—

(1) Mönkemeyer, N. Jahrb. f. Min. G. u. P., Bb. *22*, 1 (1906).

Cloruro e bromuro d'argento. — Dalle miscele fuse di cloruro e bromuro d'argento si depositano pure cristalli misti omogenei (1) (tipo II di Roozeboom). Come si può vedere dalla 2ª tabella, anche in questo caso i valori trovati sono inferiori a quelli calcolati; le differenze tra valori trovati e valori calcolati sono ancora più piccole che non nel caso precedente.

TABELLA 2ª.

$AgCl + AgBr$

Composizione della miscela		K trovato $t = 500°$	K calcolato	$K_{calc.}-K_{trov.}$	Differenze %
% in peso di AgCl	molecole % di AgCl				
0.00	0.00	2.924	—	—	—
24 65	30.00	3.130	3.143	0.013	0.22
43.00	50.00	3.246	3 288	0.042	1.27
64.00	70.00	3.409	3.434	0.025	0.73
100.00	100.00	3.653	—	—	—

Cloruro talloso e cloruro d'argento. — Dal diagramma di solidificazione delle miscele di questi due sali (2) risulta la formazione di un composto decomponibile alla fusione. e quindi, indubbiamente largamente dissociato nel fuso. Si noti che l'isoterma di conduttività venne costruita a una temperatura di circa 250° più alta della temperatura di formazione di questo composto. Tuttavia, come risulta dalla tabella 3ª, le differenze percentuali tra i valori trovati e i valori calcolati sono di molto maggiori che non nei casi precedenti, e raggiungono il 25 %: cosicchè, mentre, nei sistemi precedenti, tali differenze potevano venire attribuite in principal modo a retrocessione del grado di dissociazione per la presenza di uno ione in comune, in quest'ultimo esse debbono provenire principalmente dall'esistenza di molecole complesse nel fuso.

(1) Mönkemeyer, loc. cit

(2) Questi Rend., *20*, 2° sem.

Tabella 3ª.

Tl Cl + Ag Cl

Composizione della miscela		K trovato $t = 500°$	K calcolato	$K_{calc} - K_{trov.}$	Differenze %
% in peso di Tl Cl	molecole % di Tl Cl				
0 00	0.00	3.653	—	—	—
22.77	15.30	2.925	3.277	0.352	10.74
42.00	30.00	2 260	2.921	0.661	22.63
63.00	50 00	1.771	2.433	0.662	27.21
79.43	70.00	1.470	1.946	0.476	24.46
100 00	100.00	1.215	—	—	—

Dalle miscele di conduttività specifica non si possono tuttavia trarre deduzioni decisive, per le possibili variazioni di densità alla mescolanza dei due sali; è necessario ricorrere alla determinazione delle conduttività equivalenti. e quindi a misure di densità delle varie miscele, per poter risalire alle concentrazioni; sotto questo punto di vista proseguo le mie ricerche. Da misure già fatte posso già dire che le variazioni di densità sono assai piccole e tali da non alterare l'andamento generale dei valori della conduttività specifica come sono qui considerati.

In una prossima Nota esporrò i risultati di misure allo stato solido di questi stessi sistemi e le deduzioni che da essi si possono fare.

Chimica-fisica. — *Analisi termica delle miscele degli idrati alcalini coi corrispondenti alogenuri.* I. *Composti di potassio.* Nota di Giuseppe Scarpa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sullo zolfo di Zonda-(S. Juan)* (Repubblica Argentina) (1). Nota di C. Perrier, presentata dal Socio F. Parona.

Nella collezione dei minerali della Repubblica Argentina, esistente nel Museo di mineralogia della R. Università di Torino, e della quale fu studiato solo recentemente il dioptasio di Còrdoba (2), notai un campione di zolfo portante l'indicazione « Azufre-Zonda-(S. Juan) », che mi parve particolarmente interessante per la ricchezza e lo splendore delle faccie che i numerosi cristallini presentavano.

Siccome non risulta che tale giacimento sia stato finora menzionato a proposito dello zolfo, e tanto meno che sia stato fino ad ora descritto, ho accolto con piacere il consiglio del prof. Zambonini di eseguirne uno studio cristallografico, di cui espongo quì i risultati.

Lo zolfo di Zonda si presenta in aggruppamenti irregolari di cristalli, sopra una massa argillosa compatta, di colore grigiastro, contenente qualche cristallino di quarzo; nelle piccole cavità di questa si rinvengono degli individui generalmente isolati, assai piccoli, molto ricchi di facce, tutte ben lucenti e piane, sui quali ho potuto eseguire delle buone misure.

La grandezza di questi cristalli, che hanno *habitus* esclusivamente globulare, varia da 1 a 2 mm.

In essi mi fu possibile di identificare le seguenti 24 forme:

a {100}	b {010}	c {001}			
m {110}					
n {011}	v {013}				
e {101}	u {103}.				
ψ {119}	ω {117}	t {115}	o {114}	s {113}	y {112}
	p {111}	δ {221}	γ {331}	ε {551}	
q {131}	x {133}	z {135}			
r {311}	α {313}	β {315}.			

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. F. Zambonini

(2) E. Quercigh, *Il dioptasio di Córdoba (Argentina)*. Rend. Acc. sc. fis. e mat. di Napoli, 1914, fasc. 11-12.

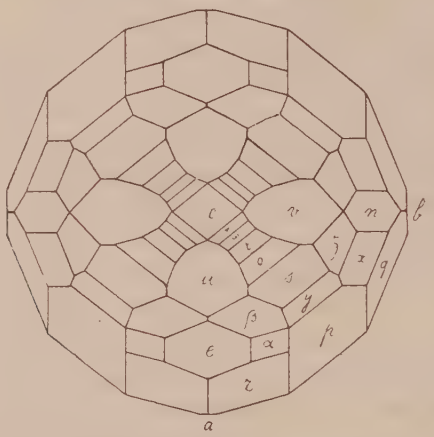
Le combinazioni notate furono le seguenti:

1) c , ψ , ω , t , o , s , y , p , γ m , v, n , β , r;
2) c , t, o , s , y , p , δ , γ , m , v, n , b , β , α , r;
3) c, ψ, ω , t , o , s , y , p , v , n , b , z , x , q , a, u, e , α,
4) c , ψ , ω, t , o , s , y , p, ε , m , a , u , e , β , α , r;
5) c, ψ , ω , t , o , s , y , p , v , n , b , z, x , q , u , e, a , β , α , r;
6) c, ω , t , s , y , p , γ , m , v , n , b , z , x , q , u , e , β;
7) c , ψ , ω , t , o , s , y , p , z , x , u , e , β;
8) c , t , s , p , v , n , b , z , x , q (cristallo rotto).

		Valore medio osservato	Limiti		Valori calcolati	Differenze calc-oss.
$c : \psi =$ (001):	(119)	18°30′	18°16′	18°45′	18°32′	2′
ω	(117)	23 17	23	23 29	23 19	2
t	(115)	31 5	30 55	31 14	31 6 ½	1 ½
o	(114)	37 2	36 57	37 5	37 2	0
s	(113)	45 7	44 54	45 18	45 10	3
y	(112)	56 31	56 22	56 46	56 27 ½	3 ½
p	(111)	71 39	71 30	71 46	71 40	1
δ	(221)	80 42	80°42′		80 35 ½	— 6 ½
γ	(331)	83 39	83°27′	83°46′	83 42	3
ε	(551)	86 15	86°15′		86 12	— 3
m	(110)	89 59	89°55′	90°3′	90	1
v	(013)	32 22 ½	32 15	32 32	32 23 ½	1
n	(011)	62 20	62 17	62 22	62 17	— 3
b	(010)	90 2	90 1	90 4	90	— 2
z	(135)	50 59	50 56	51 5	50 59	0
x	(133)	64 5	64 2	64 7	64 4 ½	— ½
q	(131)	80 47	80 41	80 53	80 47 ¾	¾
u	(103)	37 56	37 49	38 1	37 58	2
e	(101)	66 49	66 37	66 55	66 52	3
a	(100)	90 2	90 3	90 1	90	— 2
β	(315)	55 29	55 22	55 35	55 30	1
α	(313)	67 34	67 26	67 40	67 34	0
r	(311)	82 12	82 9	82 17	82 10	— 2
(331):	(33$\bar{1}$)	12 33	12°33′		12 36	3

Per la ricchezza di forme, per l'armonico sviluppo delle piramidi e dei prismi, questi cristalli assumono in generale l'aspetto di una botte, e ricordano, perciò, moltissimo i cristalli di zolfo dell'isola di Saba nelle Indie occi-

dentali descritti da Molengraaff (1), solo si nota che nello zolfo di Zonda, oltre ad aversi un piccolo numero di forme in più, le piramidi della zona [001 : 310] sono alquanto più sviluppate, come risulta dalla annessa figura che riproduce un cristallo con la combinazione N°. 5.



Dei pinacoidi, *c* non manca mai ed ha un discreto sviluppo, esso compare però quasi sempre con una faccia sola, essendo per lo più i cristalli impiantati per l'asse delle *z*; *a* venne osservato una volta sola come una piccola facciuzza, assai poco lucente; *b* è, per lo più, assai bello ed ha pure un discreto sviluppo.

Tra i prismi di terza specie si nota solamente *m*, che però non sempre compare ed è, in ogni modo, pochissimo sviluppato.

Nella zona dei prismi di seconda specie *u* ed *e* compaiono con nitide faccette ben sviluppate, e in quella dei prismi di prima specie *v* ed *n*, pure assai belli, con buon sviluppo.

Le piramidi *t*, *s* e *p* non mancano mai (*s* e *p* con buon sviluppo, *t* invece un po' meno sviluppata); *ω*, *o* ed *y* compaiono quasi sempre, ed *o* è, in generale, poco meno sviluppato di *s*. Le piramidi *γ*, *δ* ed *ε* compaiono sempre come esilissime faccette: la prima venne osservata 3 volte; le altre una volta sola.

Nella zona delle piramidi *β*, *α* ed *r*, *α* è, in generale, sempre meno sviluppata delle altre due; assume invece una notevole estensione in quei cristalli dove compare da sola. Le piramidi *x*, *q* e *z* hanno sempre buon sviluppo.

Nella tabella seguente sono indicati i valori angolari misurati, messi a confronto con quelli calcolati in base al rapporto parametrico di v. Kokscharow

$$a : b : c = 0{,}81509 ; 1 : 1{,}90339$$

(1) Groth's Zeitscrift, XIV (1888) 45.

il quale, data l'ottima concordanza tra valore calcolato e misurato, deve valere anche per lo zolfo di questa località.

Dal punto di vista cristallografico questo giacimento acquista un notevole interesse in quanto che è noto, come, in generale, siano assai ricchi di facce solo i cristalli di zolfo provenienti dall'alterazione dei solfuri metallici, e quelli, ma più raramente, di origine vulcanica.

Così Pelloux [1] nello zolfo proveniente dall'alterazione della stibina delle Cetine di Cortoniano rinvenne 18 forme; Millosevich [2] in quello rinvenuto sulla galena blendosa di Malfidano constatò ben 27 forme. Assai ricchi di forme (21) sono pure i cristalli provenienti dalla galena di Bassick (Stati Uniti) studiati da Busz [3], come pure quelli provenienti dall'alterazione dell'antimonite di svariate località, studiati da Foullon [4], Pelikan [5], Eakle [6], Šimek [7], Quercigh [8], nei quali il numero delle forme varia da 16 a 27.

Fra i giacimenti di zolfo di natura vulcanica notevoli per ricchezza di forme ricorderò un cristallo di zolfo su lava alterata, esistente nel Museo Britannico, ma di ignota provenienza, nel quale Fletcher [9] osservò 14 forme; i cristalli di Saba misurati da Molengraaff, il quale vi rinvenne ben 23 forme; e da ultimo i cristalli di zolfo del Vesuvio, nei quali lo Zambonini [10] potè notare 11 forme, sebbene, come nota lo stesso A. località vesuviane così ricchi di facce, siano veramente eccezionali.

Lo zolfo di Zonda, mentre è da annoverarsi fra i giacimenti di zolfo più ricchi di facce, non è però, per quanto si disse in principio, da ricondursi a nessuno di questi due tipi, perchè giace sopra una roccia che non è affatto di natura vulcanica ed è priva assolutamente di solfuri metallici, onde la sua origine è verosimilmente da attribuirsi a decomposizione di acque sulfuree.

(1) A. Pelloux, *Appunti sopra alcuni minerali delle Cetine di Cortoniano presso Rosia*. Rendic. Acc. Lincei (1901), X, *2*, 12.

(2) F. Millosevich, *Zolfo ed altri minerali della miniera di Malfidano presso Buggerru*. Rend. Acc. Lincei (1898), VII, *2*, 250.

(3) K. Busz, *Schwefel von Bassick*. Zeit. f. Kryst. (1890), *17*, 549.

(4) Foullon, Verh. geol. Reichsanst. (1890). *40*, 318; (1892), *42*, 175.

(5) Pelikan, *Schwefel von Allchar in Macedonien*. Tschermak's Mitt. N. *F.* (1891), *12*, 34.

(6) A. S. Eakle, *Sekundäre Mineralbildungen auf Antimonit*. Zeitschr. f. Kryst. (1895), *24*, 586.

(7) A. Šimek, *Ueber den Schwefel von Kostajnik in Serbien*. Rozpravy. böm. Akad. Prag, 1908; Ref. Zeitschr. f, Kryst. (1902), *50*, 689.

(8) E. Quercigh, *Lo zolfo dell'antimonite alterata di Selva presso Casal di Pari* (Grosseto). Rend. Acc. Lincei (1915), XXXIV, *1*, 73.

(9) L. Fletcher, *Krystallographische Notizen*. Ref. Zeitsch. f. Kryst. (1881), 5, 109.

(10) F. Zambonini, *Mineralogia Vesuviana*. Memorie Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1910.

Mineralogia. — *A proposito dell'azione della hauerite sull'argento e sul rame* [1]. Nota di E. Quercigh, presentata dal Socio C. F. Parona.

Alcuni anni fa, il prof. Giovanni Strüver ebbe occasione di osservare [2] l'alterazione prodotta dai cristalli di hauerite sull'argento e sul rame metallici, alterazione che si manifesta colla formazione dei solfuri corrispondenti.

Egli osservò, infatti, che cristalli e solidi di sfaldatura della hauerite appoggiati su lamine levigate e pulite dei due metalli accennati, vi producono, dopo un più o meno lungo periodo di permanenza, una macchia bruna o nera, avente la forma della superficie piana del minerale secondo la quale avviene il contatto; se la durata dell'esperienza si prolunga di molto, l'annerimento si manifesta anche nelle parti circostanti, immediatamente vicine, con intensità, però, rapidamente decrescente.

Il colore bruno-nero dell'impronta, che la faccia del minerale lascia sul metallo, non è uniforme: esso è generalmente molto più debole in corrispondenza alla parte centrale della faccia stessa, e l'alterazione che questa subisce durante il contatto sembra più rapida di quanto non si verifica ordinariamente nella hauerite esposta all'aria.

Le osservazioni relative a tale argomento sono contenute, insieme con altre d'indole analoga, nella Nota citata ed in un'altra [3] che la seguì a brevissima distanza; in esse il compianto mineralista si limitava ad un'esposizione obiettiva dei fatti da lui osservati, che gli suggerivano la possibilità di una reazione chimica fra la hauerite e l'argento od il rame, ed esprimeva il desiderio che altri, potendolo fare, s'impossessasse dell'argomento. Scriveva, infatti [4]: « non avrei naturalmente discaro se altri che hanno a disposizione un laboratorio chimico, e sovrattutto i giovani, i quali hanno più fondata speranza di vedere la fine delle esperienze intraprese, volessero impossessarsi dell'argomento ».

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

[2] G. Struever, *Azione chimica tra la hauerite ed alcuni metalli a temperatura ordinaria ed a secco*. Rend. Accad. Lincei X (1901), 1° sem., pag. 124.

[3] G. Struever, *Azione chimica dei solfuri di ferro e del solfo nativo sul rame e sull'argento a temperatura ordinaria ed a secco*. Rend. Accad. Linc., X (1901), 1° sem., pag. 233.

[4] loc. cit., pag. 127.

Le interessanti esperienze del prof. Strüver sono rimaste, per parecchi anni, senza sèguito; solo recentemente il Beutell (1), con una particolareggiata serie di osservazioni, ha ripreso l'argomento, arrivando, però, ad una conclusione ben diversa: egli, infatti, esclude assolutamente un'eventuale reazione, allo stato solido, fra la hauerite e l'argento ed il rame, ammessa dallo Strüver, ed attribuisce l'annerimento di questi metalli, nelle condizioni indicate, unicamente allo zolfo prodottosi per la scomposizione del minerale causata dall'aria atmosferica, zolfo che, avendo, alla pressione e temperatura ordinarie, una discreta tensione di vapore, rende possibile, com'è ovvio, la sua azione anche in punti relativamente distanti da quelli in cui si è formato.

Queste conclusioni non mi sembrarono pienamente giustificate dalle ricerche del Beutell, e, dato l'interesse che mi parve presentasse questo problema, decisi di eseguire qualche nuova esperienza in proposito.

Mentre mi accingevo a comunicare privatamente al prof. Strüver i miei risultati, — i quali rettificano le conclusioni di Beutell nel senso che dimostrano, oltre alla capacità della hauerite di agire sull'argento e sul rame per mezzo dei vapori di zolfo originatisi nella notissima scomposizione del minerale all'aria, anche quella di reagire allo stato solido coi detti metalli, conformemente all'opinione avanzata dal prof. Strüver, — giunse improvvisa la notizia, triste per la mineralogia, tristissima per quella italiana in particolare, della morte dell'illustre scienziato.

Esporrò quindi in questa Nota le mie osservazioni e le deduzioni che da esse sembrano giustificate, tanto più che così mi è possibile di compiere l'opera gradita di dimostrare come le vedute del compianto Maestro, ben noto per la precisione ed il rigore delle sue indagini scientifiche, corrispondano, anche su questo argomento —, contrariamente alla supposizione di Beutell —, completamente alla realtà delle cose.

Il Beutell constatò anzitutto, come già aveva fatto lo Strüver, che la macchia nera della hauerite si estende tutt'intorno un po' al di là dei limiti della superficie di contatto fra essa e l'argento. Quest'azione, però, che dimostra la presenza di zolfo libero — il quale, com'è noto, agisce anche a distanza, possedendo una discreta tensione di vapore alla temperatura ordinaria —, non esclude in alcun modo la possibilità di una reazione, allo stato solido, fra il minerale ed il metallo.

Lo stesso si deve convenire rispetto all'altro fatto osservato dal Beutell, e parimenti già messo in evidenza dallo Strüver, che, cioè, le macchie hanno i bordi molto marcati, mentre verso la parte centrale possiedono un colore

(1) A. Beutell, *Die Zersetzung des Hauerits an der Luft und die dadurch hervorgerufene Einwirkung auf Silber und Kupfer*. Centralblatt f. Min. Geol. u. Pal. (1913), 758 (Dezember).

assai più debole, colore che solo col lungo prolungarsi dell'esperienza va diventando lentamente più carico; anche qui si mette bene in luce l'azione dell'aria e quella conseguente dello zolfo come prodotto di scomposizione del minerale, ma non si può escludere la reazione allo stato solido, tanto più che, siccome quest'ultima avviene solo quando si verifica un contatto diretto ed intimo, si possono avere gravi dubbî sulla perfezione dell'aderenza nei casi in cui, come nelle esperienze di Beutell, il cristallo di hauerite stava appoggiato semplicemente sulla lamina d'argento.

Un'altra esperienza, e la più conclusiva in apparenza, fu eseguita dal Beutell: la polvere di hauerite, riscaldata a 50° nel vuoto eseguito colla sua pompa a mercurio (1), dava un sublimato di zolfo, e si mostrava, in seguito, inattiva verso l'argento. Analogo comportamento dimostrò un cubetto di sfaldatura di hauerite di 5 mm. di lato.

A me sembra che in queste ultime esperienze rimanga maggiormente problematico il contatto fra l'hauerite ed il metallo: infatti, è evidente che, se un sublimato di zolfo si verifica nelle condizioni suddette, non possiamo più avere la certezza che la superficie esterna dei granuli di polvere o del cubo di sfaldatura sia costituita da hauerite inalterata, ed appare giustificato il dubbio che il contatto diretto e perfetto abbia luogo fra le due sostanze quando, dopo eseguito il vuoto ed il riscaldamento a 50°, esse vengono, con opportune manipolazioni, portate in vicinanza.

In tutta l'esposizione, molto particolareggiata, fatta dal Beutell, non si trova cenno di alcuna precauzione presa per assicurarsi un contatto intimo fra il minerale fresco ed il metallo.

Per dimostrare che una reazione chimica fra solidi non si verifica in questo caso, sarebbe stato necessario di provare che, nonostante il contatto perfetto, l'azione non si manifesta nemmeno in piccolissima misura.

Io ho incominciato col premere in una morsa una lamina d'argento piana e smerigliata di fresco, contro una faccia di sfaldatura, molto piana e splendente, della hauerite di Raddusa (che devo alla cortesia del prof. Zambonini, il quale me ne regalò, qualche anno fa, dei bellissimi esemplari, per servirmene in altre ricerche).

Dopo circa 40 ore, la superficie dell'argento corrispondente alla faccia del minerale apparve leggermente, ma decisamente imbrunita in corrispondenza ai punti in cui il contatto era stato più perfetto (messi in evidenza dalla deformazione subìta dalla lamina, la quale aveva uno spessore di mm. 0,5 ed era separata dalla morsa per mezzo di un interposto disco di cartone d'amianto), con delle striature nere qua e là, le quali si trovano, come poi verificai, in corrispondenza delle sottilissime linee di frattura del

(1) A. Beutell. *Neue automatische Quecksilberluftpumpe.* Chemiker Zeitung, an. 1910, n. 150, pag. 1352.

minerale, nelle quali, come lo stesso Beutell ammette in un'osservazione analoga, probabilmente si è insinuata col tempo l'azione dell'aria.

Per escludere l'azione dell'aria atmosferica, ho, poi, eseguito la pulitura della lamina d'argento sotto il toluolo contenuto in apposita bacinella; nello stesso modo ho pulito colla carta smerigliata una faccia d'ottaedro del minerale, e, mantenendo le sostanze sempre sotto il toluolo, le ho sovrapposte e strette, — per quanto fu possibile, senza incorrere nel pericolo di provocare la rottura del cristallo — in una morsetta.

Dopo 24 ore di riposo sotto il toluolo, la lamina mostrò un notevole imbrunimento in corrispondenza alla faccia del cristallo. Quest'esperienza fu ripetuta moltissime volte senza levare le sostanze dal toluolo e smerigliando sempre accuratamente le due superfici di contatto; fu anche modificata ricorrendo a superficie di sfaldatura della hauerite, ottenute operando sempre sotto toluolo, ed ebbi così costantemente i medesimi risultati.

Tre sono le ipotesi che si possono avanzare per spiegare questi fatti:

1°) reazione, allo stato solido. fra hauerite ed argento;

2°) azione del toluolo sulla hauerite, cioè capacità di sottrarne una parte dello zolfo che viene fissato dall'argento in immediata vicinanza;

3°) presenza di zolfo libero o di idrogeno solforato nel minerale di Raddusa.

Sarebbe ammissibile, inoltre, la concomitanza di due o tutte queste possibilità.

Che la hauerite di Raddusa contenga dello zolfo libero, non pare probabile se si considera l'analisi che ne fece il prof. Eugenio Scacchi [1], trovandosi il 46,05 % di manganese ed il 53,76 di zolfo, mentre la formola $Mn S_2$ richiederebbe, per tale quantità di manganese, il 53,77 di zolfo; ad ogni modo io ho distrutto il valore di questa ipotetica obiezione col tenere sotto toluolo la superficie levigata della hauerite, per 24 ore, separata dall'argento prima di sovrapporla a questo: è evidente che il toluolo in questo intervallo di tempo ha avuto modo di sciogliere ed asportare lo zolfo libero eventualmente esistente alla superficie, tanto più che non ho mancato di strofinare, di tanto in tanto, la faccia in quistione sopra un pezzo di velluto posto al fondo della bacinella.

Siccome anche con tale precauzione la macchia bruna si manifestò dopo il contatto fra le due sostanze effettuato per mezzo della morsetta, credo che più non sia sostenibile l'attribuire allo zolfo libero tale fenomeno.

Anche l'ipotesi che il toluolo abbia la capacità di sottrarre dello zolfo alla hauerite, quantunque si sappia che in tale minerale la metà dello zolfo è molto debolmente legata, appare poco fondata dopo l'esperienza precedente,

[1] Eugenio Scacchi, *Sulla hauerite delle solfare di Raddusa in Sicilia*. Rend. R. Accad. d. scienze fis. e mat. Napoli, aprile (1890).

poichè, in tal caso, in 24 ore il toluolo avrebbe ben potuto asportare dello zolfo dalla superficie del cristallo, formandovi in tal modo un esilissimo strato di alabandina la cui azione sull'argento sarebbe ancora più difficile a spiegare, volendo escludere la reazione allo stato solido.

Ad ogni modo, io ho voluto fare un'altra esperienza: un cristallino di hauerite fu accuratamente privato dallo strato superficiale di prodotti d'alterazione, e quindi porfirizzato accuratamente in mortaio d'agata sotto il toluolo. Lasciata quindi depositare la polvere finissima in fondo al mortaio, fu esportata con una pipetta la maggior parte del liquido soprastante, rimpiazzandolo con del nuovo e ripetendo l'operazione un paio di volte nell'intento di allontanare tutto lo zolfo, presente come tale, nelle fenditure microscopiche che esistono spesso nei cristalli di hauerite in direzione dei piani di sfaldatura, fenditure in cui, attraverso il tempo, l'aria atmosferica od altri agenti hanno prodotto una lieve alterazione che si può constatare sfaldando minutamente un cristallo: si osservano infatti, generalmente, fra la maggior parte delle superficie di sfaldatura brillanti e freschissime, alcune poche che sono matte e grigiastre.

Il liquido di lavaggio, filtrato in pesafiltri tarato, fu evaporato lentamente ed il residuo tenuissimo, costituito da zolfo, fu pesato. Da gr. 1.000 di hauerite ottenni così gr. 0.000 3 di zolfo, cioè il 0.3 $^{0}/_{00}$: quantità, come si vede, molto piccola.

La polvere di hauerite fu in tutte queste osservazioni tenuta costantemente sotto toluolo, e l'operazione di lavaggio fu in seguito eseguita parecchie volte ad intervalli di tre o quattro giorni. L'evaporazione del toluolo di lavaggio mise in evidenza che nessuna azione sensibile, nelle mie condizioni, è esercitata da questo solvente sulla hauerite pura, e con ciò rimangono maggiormente da escludersi le ipotesi 2ª e 3ª.

Dopo che per varie settimane la polvere di hauerite fu sottoposta a questo trattamento, ne ho posto una porzione fra due lamine di argento levigate e pulite di fresco, agendo sempre sotto toluolo, ed ho stretto fortemente il tutto nella solita morsetta. In 24 ore, la macchia bruna, in corrispondenza ai punti di contatto, è comparsa come al solito. Sembra, da quanto dissi, che la prima delle tre ipotesi menzionate sia la più verosimile, poichè non mi pare che il fenomeno sia altrimenti spiegabile che coll'ammissione di una reazione chimica fra hauerite ed argento.

Il rame si comporta in modo analogo all'argento; dato il colore del metallo, il fenomeno si manifesta in modo molto meno evidente ma non dubbio.

Non è ammissibile che la pressione, molto piccola del resto, esercitata in tutte queste esperienze fra le due sostanze reagenti, abbia influenza favorevole alla reazione, e tanto meno che ne sia la causa unica, perchè la reazione:

$$Mn S_2 + 2 Ag = Mn S + Ag_2 S$$

avviene con un leggero aumento di volume e quindi non potrà essere che ostacolata da un aumento di pressione.

Anche nel caso del rame si calcola che la reazione:

$$Mn\,S_2 + 2\,Cu = Mn\,S + Cu_2S$$

avviene con una leggerissima variazione di volume, ciò che esclude una sensibile influenza delle piccole pressioni sull'andamento della reazione stessa.

Da quanto esposi, sembra giustificata la conclusione che, mentre le ricerche di Beutell dimostrarono ad esuberanza l'azione dell'aria sull'hauerite che si manifesta con liberazione di zolfo, esse però non esclusero in alcun modo la possibilità di una reazione chimica allo stato solido; tale possibilità risulta evidente dalle mie esperienze.

L'azione è molto maggiore, com'è ovvio, alla presenza dell'aria, poichè in tal caso si verifica, inoltre, la liberazione di zolfo elementare, in modo analogo a quanto fu verificato per la cobaltite (1), il glaucodoto (2), l'arsenopirite (3), ecc. dallo stesso Beutell. Lo zolfo, avendo una discreta tensione di vapore a temperatura ordinaria, agisce anche a distanza, e si può dire che, dopo avvenuta l'alterazione superficiale dell'hauerite in contatto coll'argento, ogni ulteriore annerimento di questo è dovuto esclusivamente ai vapori di zolfo.

Biologia. — *Una ipotesi biologica sulla deposizione dello zolfo durante l'epoca gessoso-solfifera.* Nota I^a^ di G. Bargagli-Petrucci, presentata dal Corrisp. P. Baccarini (4).

In una Nota su « l'origine biologica della *Terra di Siena* » (5) esposi le considerazioni che mi condussero a ritenere i depositi di terre gialle e

(1) A. Beutell, Chemisch-mineralogische Untersuchungen am Glanzkobalt, in Centralblatt f. Min. Geol. u. Pal. (1911) 663.

(2) Id., Chem.-min. Unters. am Glaukodot, loc. cit., pag. 411.

(3) Id., Chem.-min. Unters. am Arsenkies, loc. cit., pag. 316.

(4) Questa Nota era già in corso di stampa quando il *Chemischen Centralblatt* (1915, fasc. 7) ha pubblicato il riassunto di un interessante lavoro di Jacobsen pubblicato in *Folia microbiologica* (dic. 1914), dal quale risulta come da fanghi di diversa origine e da terra di giardino si possa ottenere un microorganismo (*Thiobacillus thioparus*) capace di decomporre H_2S in culture liquide di laboratorio, con formazione di piccole goccie molto rifrangenti di zolfo alla superficie del liquido di cultura all'esterno dei batterii. Lo zolfo così formato passerebbe poi lentamente ad acido solforico. Il *Thiobacillus thioparus* agirebbe anche qui da ossidante, ed è importante di notare l'analogia fra le osservazioni di Jacobsen e quelle eseguite sul *B. ferrigenus* alla regione boracifera. Il fenomeno sarebbe dunque assai più comune di quanto si credeva, e ciò rende più verosimile l'ipotesi.

(5) Bargagli-Petrucci G., *Sull'origine biologica della « Terra di Siena »*. (Mem. della R. Accad. dei Lincei, anno CCCIX, 1914).

bolari del monte Amiata come un prodotto del lavoro di microorganismi ossidanti, i quali avrebbero esercitato la loro azione, se non esclusiva, almeno preponderante, in seno ad acque lacustri di piccoli bacini montani.

Si trattava allora di emettere una ipotesi probabile sull'origine di formazioni sedimentari di potenza relativamente assai piccola: e tale ipotesi, suggerita dalle esperienze di laboratorio sul *Bacillus ferrigenus* (1), trovò indirette conferme nelle osservazioni eseguite, non solo nella regione boracifera toscana dalla quale quel germe proveniva (2), ma anche sulle acque di alcune sorgenti del monte Amiata; acque abbastanze ricche in deposito ferrugginoso, che i chimici hanno trovate ozonizzate (3), e nelle quali potei constatare la presenza di microorganismi, poco diversi dal *B. ferrigenus*, agenti in modo analogo sul loro contenuto ferroso (4).

Un'altra serie di ricerche mi permise di osservare sperimentalmente che microorganismi ossidanti, quali il *B. ferrigenus*, sono capaci di agire anche sopra altri composti assai comuni in natura, quali l'idrogeno solforato ed i solfuri, alla ossidazione dei quali essi contribuiscono in modo diverso, secondo le condizioni nelle quali si trovano ad operare, riuscendo spesso, in determinati casi, alla liberazione dello zolfo dai suoi legami ed alla sua deposizione allo stato metalloidico (5).

Da tali constatazioni nacque l'idea di prendere in esame quale potrebbe essere una eventuale azione, in natura, di grandi quantità di simili germi operanti in seno ad acque calde, lacustri o salmastre; e, benchè un accurato esame delle acque della regione boracifera non mi sia stato consentito, i fatti osservati e i dati raccolti in questa regione mi sono sembrati perfettamente concordanti con le ricerche eseguite in laboratorio, portandomi a ritenere che l'idrogeno solforato ed i solfuri, nelle loro trasformazioni chimiche, risentano, in maniera non dubbia, dell'opera di questi microorganismi.

La quantità di zolfo metalloidico che si deposita nelle incrostazioni così frequenti a Larderello e negli altri luoghi boraciferi, e quella che si può riscontrare nei fanghi circostanti a certi lagoni ed a certi soffioni, è ben poca cosa in confronto ai potenti depositi di questo metalloide che si incontrano nei terreni della formazione gessoso-solfifera, tanto importante specialmente

(1) Bargagli-Petrucci G., *Studii della flora microscopica della regione boracifera toscana.* III. *Il Bacillus ferrigenus* n. sp. (N. Giorn. bot. it., nuova serie, vol. XX, an. 1913).

(2) Id., *Studii* ecc. IV. *L'origine biologica della lagonite* (ivi).

(3) Nasini e Porlezza, *Sulla esistenza di acque naturali ozonizzate* ecc. (Rend. della R. Accad. dei Lincei, classe di scienze fisiche, vol. XXI, pag. 740, an. 1912).

(4) Bargagli-Petrucci G., *Sulla presenza di Batteriacee ossidanti nelle acque ozonizzate delle Bagnore e dei Bagnoli sul monte Amiata.* Proc. verb. della Soc. bot. ital., seduta 14 giugno 1914.

(5) Idem., *Studii sulla flora microscopica della regione boracifera toscana.* V. *L'ossidazione biologica dell'idrogeno solforato* (N. Giorn. bot. it., nuova serie, vol. XXI, an. 1914).

nella Sicilia. Ciò non ostante, non mi è sembrato fuori di luogo il prendere in esame una interessante questione: se, cioè, e fino a qual punto si può supporre che azioni biologiche di microorganismi, e specialmente di batteriacee, possano avere avuto parte nella formazione di quei depositi. All'esame di questa ipotesi sono dedicate le considerazioni che seguono; considerazioni che, mi auguro, non sembreranno fantastiche anche a coloro che non consentissero nella mia ipotesi, perchè io credo non si possa ormai più dubitare della enorme influenza che gli esseri microscopici possono attualmente avere nelle trasformazioni della materia inorganica, e di quella che possono avere avuta nel passato, in epoche nelle quali la più elevata temperatura e l'esuberanza della vita vegetale ed animale dovevano essere particolarmente favorevoli alla moltiplicazione ed alla attività di quei germi; tanto meglio poi in assenza dell'uomo, che con la sua agricoltura e le sue industrie, con i suoi diboscamenti e le sue bonifiche, altera profondamente tanti fenomeni naturali e tanti aspetti della natura.

***

Che lo zolfo ed il calcare solfifero si siano depositati in bacini chiusi o semichiusi fu già sostenuto, con successo, da autori anche non molto recenti, contro la opinione di altri i quali mettevano in rapporto la formazione dei depositi di zolfo unicamente con i fenomeni vulcanici, che avrebbero determinato infiltrazioni di gas nelle roccie preesistenti, dove essi avrebbero depositato lo zolfo, oppure avrebbero determinate addirittura delle sublimazioni di questo elemento (1). Altri pensavano invece che la deposizione dello zolfo fosse avvenuta per effetto della decomposizione dell'acido solforico che avveniva in acque contenenti marne in sospensione (2), oppure la attribuivano alla decomposizione di questo gas per reazione dell'acido carbonico e dell'acqua sopra i solfuri, l'origine dei quali sarebbe stata dovuta alla riduzione del solfato di calce per mezzo di sostanze organiche (3).

Mottura scrisse a questo proposito, le seguenti parole:

« L'influenza del regno organico sulla produzione dello zolfo allo stato « di libertà era già stata annunziata da Chaptal nel secolo scorso, abbenchè « egli abbia errato nell'indicare il modo di generazione dello zolfo. Egli os- « serva, nella sua opera di Chimica, che lo zolfo trovato nei pozzi neri e « quello trovato a Parigi nelle fosse dei baluardi antichi, allorchè questi « vennero distrutti, debbono alla presenza delle sostanze organiche la loro « origine ».

(1) Schwarzemberg, *Tecnologia dei prodotti chimici*, Braunschweig 1865.
(2) Maravigna, Comptes rendus VII, 1838.
(3) Paillette, Comptes rendus XVII, 1843.

Altrove lo stesso Mottura, parlando delle ipotesi emesse da Bischoff e Paillette i quali consideravano « il minerale di zolfo come il rappresentante « locale di uno strato di solfato di calcio associato a sostanze organiche », cerca di dimostrarne la inammissibità, domandandosi fra le altre cose: « Per « quale ragione non venne ridotto il solfato di calce che si trova nei *par-* « *timenti*, ossia nelle parti più ricche, in sostanze bituminose, di tutta la « formazione solfifera? ».

« Per spiegare questa ipotesi », egli aggiunge, « è necessario di ammettere « che queste sostanze organiche fossero nel banco di minerale in propor- « zioni ragguardevoli, per dare origine ad una così importante formazione « di zolfo. Se questi esseri organici fossero esistiti, come si trovano im- « pronte di pesci, di legno fossile, e perfino delle foglie in stato di perfetta « conservazione, si dovrebbero rintracciare in quantità straordinaria i loro re- « sidui. Il legno fossile tuttavia, i pesci e le foglie, sono elementi rarissimi, « e servono, col loro stato di perfetta conservazione, a provare la quasi as- « soluta deficienza di esseri, sia vegetali sia animali, nel terreno solfifero, e « l'impossibilità della trasformazione locale del solfato di calce, dell'epoca « solfifera, nel minerale di zolfo » (1).

Pienamente d'accordo con questo autore nel ritenere improbabile una tale trasformazione del solfato di calce in minerale di zolfo, ho però riportato i precedenti brani per rilevare l'erroneità della illazione che egli trae a proposito dell'azione organica. Non è giusto infatti dire: *se esseri organici ci fossero stati, se ne troverebbero i resti*; occorre pensare anche a quegli esseri che, come le batteriacee, non possono lasciare traccia di sè, e che pure possono esercitare enormi influenze in natura.

Ma soprattutto intendo notare che l'idea di una azione organica, diretta o indiretta, nella formazione dei depositi solfiferi, è assai antica: e ciò è per me assai importante, benchè l'ipotesi che formulo sia assai diversa da quella immaginata dagli antichi autori e sostenuta anche da alcuni moderni. E a questo proposito è da ricordare anche l'ipotesi del Gemellaro (2) il quale pensava che lo zolfo provenisse da organismi animali (molluschi), nello stesso modo che il carbon fossile proviene da sostanze vegetali.

Per una non trascurabile coincidenza, gli esseri che con il loro comportamento nelle culture mi hanno suggerito la mia ipotesi, provenivano appunto da quella regione boracifera toscana che suggerì ad Hoffmann il seguente ravvicinamento: « In un periodo che è immediatamente successo alle « più recenti formazioni dei terreni secondarii », egli dice, « una gran parte « della Sicilia, in uno spazio geografico di 150 miglia quadrate, fu sotto- « posta all'azione di vapori carichi di zolfo, in quella guisa che le fumac-

(1) Mottura, *Sulla formazione terziaria della zona solfifera della Sicilia* (Mem. d. Com. Geol., vol. I, 1871).

(2) Gemellaro, Atti dell'Acc. Gioenia di Catania, vol. X, 1835.

« chie della Maremma toscana, da me precedentemente visitate, ancora chia-
« ramente mi rappresentavano ».

Mottura però non sembrò accettare l'ipotesi che nelle acque dell'epoca solfifera e nella sovrastante atmosfera esistessero notevoli quantità di acido solfidrico, che con la sua decomposizione avrebbe determinato il deposito di zolfo. Egli osserva che ciò non avviene alle *Acque Albule* di Tivoli, dove l'acido solfidrico si disperde quasi completamente nell'atmosfera senza lasciare un apprezzabile residuo di zolfo nelle concrezioni calcaree (travertini) prodotte dal passaggio del bicarbonato in carbonato di calcio.

Partendo da tale osservazione, il Mottura esprime una ipotesi un poco diversa, ammettendo che le acque di quegli antichi laghi contenessero in soluzione, come materiale primo, del solfuro di calcio, proveniente forse dalla riduzione dei gessi sottostanti ai banchi di tripoli ed al calcare siliceo. Ammesso ciò, ritiene che la decomposizione del solfuro di calcio abbia dato, da un lato carbonato di calcio, e dall'altro idrogeno solforato, il quale, producendosi lentamente, e, per così dire, allo stato nascente, aveva agio di ossidarsi a mano a mano che si formava, producendo zolfo libero, senza disperdersi nell'atmosfera come avviene nei laghi di Tivoli.

L'una e l'altra ipotesi sulla natura del materiale primo che si offriva alla esplicazione del fenomeno, possono concordare con l'intervento in esso di una azione biologica, e non è da escludere che l'uno e l'altro caso possano essersi verificati, sia contemporaneamente, sia in località ed epoche diverse, benchè io propenda a credere più verosimile l'ipotesi che ammette la presenza di bicarbonato di calcio e di idrogeno solforato. Sulla possibile origine di quest'ultimo accennerò qualche cosa più oltre, senza pretendere di approfondire in questo senso le indagini e le ipotesi.

Un concetto, in qualche punto diverso da quello di Mottura, espose il Baldacci, il quale ritiene che i depositi di zolfo non abbiano origine lacustre, ma lagunare, o marina di basso fondo, fondandosi sul ritrovamento di alcuni fossili di pesci marini.

Non è da escludere questo concetto: anzi esso è estremamente probabile, come sembra venir confermato dalla posizione che le più importanti solfare occupano di fronte alle varie formazioni geologiche; ma ciò non influisce sulla ipotesi biologica della deposizione dello zolfo, poichè il fenomeno come è supposto da essa, può ugualmente essersi verificato in laghi di acqua dolce, come in lagune o in insenature marine, e nulla si sarebbe opposto a supporlo possibile anche in mare aperto.

* * *

Esaminando i diversi sedimenti che si sono formati successivamente in questi bacini lacustri e lagunari, basta, per il mio scopo, incominciare da quello che in modo costante precede, in ordine di tempo, il minerale di

zolfo, e che conserva nel modo più certo la evidente impronta di una origine organica: il tripoli, costituito, come è noto, dai resti silicei di Diatomee.

Tralascio invece i sottostanti strati che non hanno, sotto il mio punto di vista, una speciale importanza, non ostante gli indizii che potrebbero suggerire intesessanti riflessioni, troppo vaghe per ora per essere qui riferite.

La massima potenza di questi banchi si aggira, secondo Mottura, fra i 30 e i 40 metri; ma può anche oltrepassarla. Questo potente deposito corrisponde in più grandiosa scala, ad una fase biologica analoga a quella di quei piccoli laghi dell'Amiata che sono oggi le cave di tripoli, ed analoga a quella che si verificò, per brevissimo periodo, in quegli altri bacini dello stesso monte, dove più tardi si sviluppò il processo biologico della deposizione dell'idrossido di ferro; fenomeno che condusse alla formazione delle terre gialle e bolari (Terra di Siena) (1). Durante quel periodo le acque dovevano essere assai limpide e pure, e non dovevano essere nè eccessivamente calde, nè troppo cariche di sostanze minerali; forse esse si rinnovavano abbastanza facilmente, perchè non potessero accumularsi e trasformarsi quei sali di calcio che avrebbero prodotto un notevole deposito di materiale calcareo.

Ma verso la fine di questo periodo biologico, caratterizzato dalla egemonia delle Diatomee, le condizioni devono essersi modificate. Forse le acque divennero più ricche in questi sali; forse, la temperatura divenne più elevata; forse modificazioni oro-idrografiche sopraggiunte resero più lento il rinnovarsi delle acque nei bacini, nei quali così vennero ad accumularsi, non solo sali minerali, specialmente calcarei, che si depositarono sopra le spoglie delle Diatomee, ma anche sostanze organiche provenienti principalmente appunto dalla decomposizione di un immenso numero di cadaveri di alghe. In questo periodo, a poco a poco, la vegetazione delle Diatomee si rallentò molto, e ad esso mi sembra corrispondere il deposito, più o meno potente, del *calcare siliceo*.

Non abbiamo dati per affermare o per negare la presenza, durante questi periodi, di idrogeno solforato disciolto nelle acque: ma esso non doveva certamente abbondare, specialmente durante il periodo di prevalenza delle Diatomee, o, se esisteva, si perdeva nell'atmosfera senza lasciare traccie; non troviamo infatti nè gessi, nè zolfo, almeno in quantità notevoli.

Ma esso deve essere ben presto comparso in abbondanza, qualunque sia stata la sua origine (emanazioni, fermentazioni di sostanze organiche, riduzioni di gessi, ecc.), ed allora, in quelle acque difficilmente rinnovantisi, ricche di sostanze organiche, assai ricche pure di bicarbonato di calcio, ed a temperatura piuttosto elevata, io suppongo abbia avuto principio il processo di

(1) Bargagli-Petrucci, *Sull'origine biologica della « Terra di Siena »* (loc. cit.).

ossidazione di questo gas, per opera dell'aria atmosferica in parte, ma principalmente sotto l'azione di microorganismi, che in quelle acque ed in quei fanghi, trovavano condizioni di vita favorevoli ad un rigoglioso sviluppo. E mentre il bicarbonato, trasformandosi in carbonato insolubile, precipitava verso il fondo, all'idrogeno solforato veniva impedita la dispersione nell'atmosfera dalla azione batterica che energicamente lo ossidava, liberando lo zolfo dai suoi legami chimici. Così si sarebbe formato il calcare solfifero che alimenta le industrie siciliane e di altre località.

Chè se invece si volesse supporre col Mottura, la presenza, nelle acque, di solfuro di calcio in soluzione, le cose non cambierebbero molto, perchè sappiamo che i germi ossidanti, del tipo *B. ferrigenus*, agiscono pure sui solfuri, e non sono dotati della proprietà, che hanno invece le Beggiatoacee, di ossidare ulteriormente lo zolfo conducendo alla formazione di solfati o di anidridi dello zolfo. Il *B. ferrigenus* infatti, coltivato in liquidi contenenti solfuro di sodio, sembra agire da ossidante, producendo, in primo luogo, zolfo, che, combinandosi poi con il solfito sodico, formatosi per ossidazione spontanea, conduce alla formazione di iposolfito invece che di solfato. Ove questa seconda reazione manchi, per l'assenza di elementi alcalini, il processo può limitarsi alla prima fase, e dare un deposito permanente di zolfo, (come ho veduto avvenire in alcuni fanghi della regione boracifera) mentre il calcio, sotto l'azione di anidride carbonica o di altri gas carbonati, sviluppati da organismi viventi o da sostanze organiche morte, passa allo stato di carbonato (1).

Si avrebbe insomma un processo perfettamente analogo a quello che ritengo abbia dato origine alle terre gialle e bolari: possono essere state diverse le specie batteriche: certamente fu diverso il materiale primo e, per conseguenza, anche il prodotto finale; ma il processo biologico appare perfettamente analogo.

Bene inteso, però, che questa azione biologica deve intendersi nel senso di una potente cooperazione al processo chimico, e non come una azione esclusiva, potendo come è noto, l'idrogeno solforato trasformarsi spontaneamente in acqua e zolfo, secondo la equazione

$$H_2S + O = H_2O + S.$$

Varie specie di microorganismi possono aver preso parte al fenomeno, e non è escluso che possano avervi contribuito anche quelle Beggiatoacee che, dopo avere accumulato nel loro protoplasma notevoli quantità di zolfo,

(1) Bargagli-Petrucci, *Studii sulla Flora microscopica della regione boracifera toscana*. V: *L'ossidazione biologica dell'idrogeno solforato (analisi chimiche del prof. M. Mayer)*. Nuovo Giornale botan. ital., vol. XXI, 1914.

alla loro morte lasciano un deposito di questo elemento in uno stato fisico tale da rendere facile la sua cristallizzazione, come ha dimostrato Winogradsky (1). Però non credo che siano state queste le forme prevalenti, perchè, dove esse esistono attualmente (e ciò non è raro), esse non formano notevoli depositi di zolfo; e poi è noto che esse molto spesso ossidano ulteriormente lo zolfo trasformandolo in anidride solforosa, che passa poi ad anidride solforica, dando così origine a solfati. Io penso, invece, che la principale parte del fenomeno spetti a batteriacee ossidanti, proprio come per i depositi di idrossido di ferro dell'Amiata.

Una prova assoluta di questa ipotesi non si ha, e forse non si avrà mai; ma sarà utile osservare con qualche dettaglio che essa spiega assai bene l'intima struttura dei depositi di zolfo, specialmente quando questo minerale presenta la così detta struttura *soriata*, nella quale sottili straterelli solfiferi si alternano con straterelli di calcare non solfifero, o molto povero di zolfo.

Chimica. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. II. Mobilità dell'ione* HCO_3' *alla temperatura* 18° C. Nota dei dottori E. D'Agostino e G. Quagliariello, presentata dal Corrisp. Filippo Bottazzi (2).

Questa ricerca ci è stata necessaria per preparare la via allo studio della dissociazione dei bicarbonati e dell'acido carbonico, studio che sarà pubblicato in seguito.

Esistono in letteratura soltanto i dati di Walker e Cormack (3), per la sola temperatura 18° C: questi autori hanno misurata la conduttività elettrica specifica di soluzioni abbastanza diluite di bicarbonato sodico, sia in acqua pura, che in acqua contenente un poco di acido carbonico. Le due serie di misure, in acqua pura ed in acqua carbonica, dettero risultati pressochè eguali, e perciò i detti autori credettero potere escludere che l'idrolisi del bicarbonato alteri notevolmente i valori della conduttività. I dati degli autori summentovati, ricalcolati da noi per la riduzione in Ohm reciproci e per l'adozione dei valori più recenti determinati dal Kohlrausch, sono i seguenti:

(1) Winogradsky, *Ueber Schwefelbakterien* (Bot. Zeitung, XLV, 1887; cfr. anche Stützer, *Die wichtigsten Lagerstätten der Nicht.-Erze* (Berlin 1911), Bd. I, pag. 260.

(2) Nota I, cfr. questi Rendiconti (5), vol. XXIII, 1° sem., fasc. 10, pag. 844, a. 1914.

(3) Walker e Cormack, Journ. chem. Soc., vol. 77, pag. 5, a. 1900, e Walker, Zeitschr. f. physik. Ch., vol. 32, pag. 137, a. 1900.

1. *Dati di Walker & Cormack.*

Moli di bicarbonato sodico per litri di soluzione $= n$	Conduttività specifica $= \varkappa$	Conduttività molecolare $\mu = \frac{1000\varkappa}{n}$
0,0 3125	$0,0_2 2195$	70,1
0,0 1562	$0,0_2 1147$	73,4
$0,0_2 7810$	$0,0_3 5940$	76,0 $\mu\infty = 85,0$
$0,0_2 3905$	$0,0_3 3085$	78,9
$0,0_2 1952$	$0,0_3 1586$	81,2

Per la conduttività limite si estrapola graficamente il valore:

$$\mu_\infty = 85,0$$

e togliendo da tale valore la conduttività limite del sodioione, che, secondo i dati più recenti del Kohlrausch, è eguale a 43,6 per la temperatura 18° C, si ottiene:

mobilità dell'ione HCO_3' a 18° $= \mu_{\infty HCO_3'} = 85,0 - 43,6 = 41,4$.

Nella nostra ricerca ci siamo proposti di determinare di nuovo la mobilità dell'ione HCO_3' alla temperatura 18° C, e di determinare tale valore anche per la temperatura 37° C, in vista delle applicazioni che intendiamo fare ai liquidi dell'organismo; anche noi abbiamo creduto di non poter trascurare l'idrolisi del bicarbonato, anzi ce ne siamo preoccupati più degli autori summentovati, essendochè l'idrolisi esplica un'azione maggiore alla temperatura più elevata 37° C.

1°. *Soluzioni di bicarbonato sodico in acqua pura. Temp. 18° C.*

Riportiamo nella seguente tabella i risultati delle nostre misure; prima vogliamo soltanto spiegare il metodo seguito per tener conto rigoroso della idrolisi del bicarbonato.

La quantità di soda m, espressa in moli per litro, che si libera per l'idrolisi di una soluzione assai diluita di bicarbonato sodico, della concentrazione n, è data dalla nota formola:

$$m = n \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{k_w}{k}} = \sqrt{n} \sqrt{\frac{k_w}{k}}.$$

in cui k_w è la costante di dissociazione dell'acqua ($0,0_{14}62$ secondo Lundèn), e k è la costante di dissociazione dell'acido carbonico; per k adottiamo provvisoriamente il valore $0,0_6 36$ che si deduce dai dati di Knox [1]. Si ha allora

$$m = 0,0_3 131 \sqrt{n}$$

[1] Ann. Phys. Chem., vol. 54, pag. 44, an. 1895.

La soluzione di bicarbonato può, in seguito alla idrolisi, essere considerata come costituita dalla miscela di una soluzione di soda e di una soluzione di bicarbonato, reciprocamente isoidriche rispetto al sodioione. La prima soluzione sarebbe costituita (per un litro di soluzione mista) da $1000\,\frac{m}{n}$ cmc. di soda della concentrazione n, e la seconda da $1000\,\frac{n-m}{n}$ cmc. di bicarbonato sodico della stessa concentrazione n.

La conduttività del bicarbonato, quale risulta dalla misura, dopo averne detratta la conduttività propria dell'acqua, sia $\varkappa$; la conduttività propria di una soluzione n molecolare di soda sia $\varkappa_1$, e quella di una soluzione n molecolare di bicarbonato di sodio sia $\varkappa_2$; sussisterà allora la nota relazione valida per le soluzioni isoidriche:

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1 1000\,\frac{m}{n} + \varkappa_2\, 1000\,\frac{n-m}{n}}{1000}$$

da cui si ricava

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa n - \varkappa_1 m}{n - m}.$$

Il valore $\varkappa_1$, ossia la conduttività specifica di una soluzione n molecolare di soda, può essere ricavato dai dati di Kohlrausch, e perciò a mezzo della formola precedente sarà possibile calcolare la conduttività $\varkappa_2$ di una soluzione pura non idrolizzata di bicarbonato della concentrazione n, praticando in tal modo una correzione assolutamente rigorosa dell'idrolisi.

2. — *Conduttività specifiche e molecolari di soluzioni di* $NaHCO_3$ *in acqua pura a* 18° C.

Moli $NaHC_3$ per litro $= n$	Conduttività specifica trovata, diminuita della conduttività dell'acqua $= \varkappa$	Concentrazione calcolata della soda $m = 0{,}0131\sqrt{n}$	Conduttività specifica di una soluzione NaOH n mol. $= \varkappa_1$	Conduttività corretta $\varkappa_2 = \frac{\varkappa n - \varkappa_1 m}{n - m}$	Conduttività molecolare $\mu = 1000\,\frac{\varkappa_2}{n}$	
$0{,}0_2 7505$	$0{,}0_3 6135$	$0{,}0_4 114$	$0{,}0_3 1512$	$0{,}0_3 6094$	81,2	
$0{,}0\ 1489$	$0{,}0_3 1177$	$0{,}0_4 160$	$0{,}0_3 2950$	$0{,}0_3 1172$	78,8	$\mu_\infty = 84{,}4$
$0{,}0\ 2214$	$0{,}0_3 1707$	$0{,}0_4 195$	$0{,}0_3 4340$	$0{,}0_3 1702$	76,9	
$0{,}0\ 3630$	$0{,}0_3 2707$	$0{,}0_4 250$	$0{,}0_3 6985$	$0{,}0_3 2701$	74,4	
$0{,}0\ 5001$	$0{,}0_3 3628$	$0{,}0_4 293$	$0{,}0_3 9501$	$0{,}0_3 3621$	72,4	

La conduttività limite, ricavata per estrapolazione grafica, è:

$$\mu_\infty = 84{,}4.$$

(La correzione apportata per eliminare la influenza dell'idrolisi ha una certa importanza, poichè il valore che si ricava per μ_∞ senza tale correzione è sensibilmente superiore, e cioè $\mu_\infty = 86{,}4$).

La mobilità dell'ione HCO_3' a 18° sarebbe dunque:

$$\mu_{\infty\ HCO_3'} = 84{,}4 - 43{,}6 = 40{,}8,$$

valore assai poco differente da quello calcolato sui dati di Walker & Cormack

(41.4). per il quale non si è fatta la correzione dell'idrolisi, e che forse appunto per tale motivo risulta un po' maggiore.

2°. *Soluzioni di* $NaHCO_3$ *e* $KHCO_3$, *oppure di soda e potassa caustica in acqua più o meno ricca di acido carbonico alla temperatura 18° C.*

L'osservazione da noi fatta, che la conduttività di una soluzione di bicarbonato tende ad aumentare lievemente col tempo trascorso dalla preparazione della soluzione, ci ha fatto pensare che la inevitabile liberazione di acido carbonico, da parte di soluzioni di bicarbonato esposte all'aria, potesse fare aumentare la soda libera in una proporzione tale, da influenzare i risultati della misura in un grado maggiore di quello che non faccia l'idrolisi. In tal caso il valore precedente, ricavato per la mobilità dell'ione HCO_3', sarebbe troppo elevato rispetto al valore reale. Tale sospetto è stato completamente confermato da una seconda serie di misure, ottenute usando dapprima delle soluzioni di $NaHCO_3$ e $KHCO_3$ in acqua carbonica, e poi usando addirittura delle soluzioni di NaOH e KOH esattamente titolate e preparate sciogliendo le sostanze in acqua contenente un eccesso di acido carbonico, tale che, dopo la neutralizzazione della base, rimanesse ancora presente nella soluzione allo stato libero; il secondo sistema ci è sembrato più comodo per la facilità di ottenere tali basi purissime ed esattamente titolate, il che non è parimenti facile per i bicarbonati.

Per il calcolo dei dati ci siamo serviti delle seguenti considerazioni.

Per elettroliti assai deboli, come è il caso per l'acido carbonico, sussiste la relazione (per brevità se ne omette la dimostrazione):

$$1000\frac{\varkappa}{\sqrt{m}} = \mu_\infty \sqrt{k}$$

in cui $\varkappa$ è la conduttività specifica di una soluzione contenente m moli dell'elettrolito debole, μ_∞ è la sua conduttività limite, e k è la sua costante di dissociazione. In conseguenza, anche ignorando i valori μ_∞ e k, è sempre possibile valutare l'esattezza di una serie di misure di conduttività specifiche di un elettrolito debole e la validità dell'isoterma di dissociazione, ricavando i valori $1000\frac{\varkappa}{\sqrt{m}}$, i quali devono essere costanti. Nei dati seguenti, ad esempio, riguardanti soluzioni di acido carbonico, è praticato un calcolo di tal genere, dal quale appare la buona costanza dei valori $1000\frac{\varkappa}{\sqrt{m}}$ (1).

(1) La concentrazione delle soluzioni di acido carbonico fu determinata aspirando la soluzione in una bevuta a barite, seguendo il metodo descritto nella nostra Nota I (loc. cit.); la quantità di soluzione aspirata era determinata con la pesata della bevuta prima e dopo l'aspirazione.

3. — *Conduttività specifiche di soluzioni di acido carbonico a 18° C.*

(conduttività specifica dell'acqua $= 0{,}0_6 69$).

Moli di acido carbonico per litro $= m$	Conduttività specifica trovata	La stessa, diminuita della conduttività dell'acqua $= \varkappa$	$1000 \frac{\varkappa}{\sqrt{m}} = \mu_\infty \sqrt{k}$	
0,00813	$0{,}0_4 1989$	$0{,}0_4 1917$	0,213	
0,02047	$0{,}0_4 3153$	$0{,}0_4 3084$	0,216	media
0,03104	$0{,}0_4 3799$	$0{,}0_4 3730$	0,212	$= 0{,}213$
0,03995	$0{,}0_4 4255$	$0{,}0_4 4186$	0,210	

La costanza dei valori dell'ultima colonna dimostra che l'acido carbonico segue fedelmente la legge di diluizione, e che, a mezzo della formola

$$\varkappa = 0{,}0_3 213 \sqrt{m},$$

noi possiamo calcolare la conduttività $\varkappa$ di una soluzione contenente m moli di acido carbonico per litro.

Ora, un litro di soluzione mista di acido carbonico e di bicarbonato alcalino, nelle concentrazioni rispettive di m ed n moli per litro, può essere considerato come costituito da due soluzioni isoidriche rispetto all'ione comune HCO'_3: la prima soluzione, contenendo m_i moli di acido carbonico per litro, occuperebbe il volume di $1000 \frac{m}{m_i}$ cmc.; la seconda, contenendo n_i moli di bicarbonato per litro, occuperebbe il volume di $1000 \frac{n}{n_i}$ cmc.; data però la grande dissociazione del bicarbonato rispetto a quella minima dell'acido carbonico, si può in via di approssimazione mettere $n_i = n$, ed in conseguenza la soluzione isoidrica di bicarbonato, conterrebbe n moli di bicarbonato per litro, ed occuperebbe il volume di 1000 cmc. Ciò premesso, per la nota formola che riguarda le conduttività specifiche di miscele di soluzioni isoidriche, chiamando $\varkappa$ la conduttività specifica trovata, diminuita della conduttività propria dell'acqua, $\varkappa_1$ la conduttività specifica di una soluzione contenente m_i moli di acido carbonico per litro, e $\varkappa_2$ la conduttività di una soluzione contenente n moli di bicarbonato per litro, avremo

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1 1000 \frac{m}{m_i} + \varkappa_2 1000}{1000} = \varkappa_1 \frac{m}{m_i} + \varkappa_2$$

da cui

$$\varkappa_2 = \varkappa - \varkappa_1 \frac{m}{m_i},$$

ossia, profittando della relazione precedentemente trovata,

$$\varkappa_2 = \varkappa - 0{,}0_3 213 \sqrt{m_i} \cdot \frac{m}{m_i} = \varkappa - 0{,}0_3 213 \frac{m}{\sqrt{m_i}}.$$

Applicando la legge di diluizione all'acido carbonico, si ricava

$$[HCO'_3]^2 = k m_i$$

in cui $[HCO'_3]$ indica la concentrazione dell'ione HCO'_3, k indica la costante di dissociazione dell'acido carbonico, ed m_i è la concentrazione dell'acido carbonico della soluzione isoidrica, eguale in via di approssimazione alla concentrazione dell'acido carbonico indissociato. Essendo, inoltre, le soluzioni investigate di bicarbonato assai diluite, e potendosi in conseguenza ammettere che esse siano completamente dissociate, si ha

$$[HCO'_3] = n$$

e quindi

$$m_i = \frac{n^2}{k} .$$

e sostituendo tale valore nella formola precedente, avremo

$$x_2 = x - 0{,}0_3213 \sqrt{k} \cdot \frac{m}{n} .$$

e adottando per k il valore $0{,}0_6 36$ dedotto dai dati di Knox (che può considerarsi abbastanza esatto, in via di approssimazione), si ottiene

$$x_2 = x - 0{,}0_6 128 \frac{m}{n} .$$

Seguono i dati sperimentali, in cui la correzione dell'idrolisi è stata eseguita per mezzo di questa ultima formola.

4. *Conduttività di una soluzione* 0,00835 mol. H_2CO_3 *dopo l'aggiunta di quantità variabili di* Na HCO_3 (m cost. = 0,00835). — *Temp. 18° C.*

Moli $NaHCO_3$ per litro $= n$	Conduttività trovata, diminuita della conduttività dell'acqua $= x$	Conduttività corretta: $x_2 = x - \frac{0{,}0_6 128 \times 0{,}0_2 835}{n}$	Conduttività molecolare: $\mu = 1000 \frac{x_2}{n}$	
$0{,}0_3 7270$	$0{,}0_3 5985$	$0{,}0_3 5984$	82,3	
$0{,}0\ 1442$	$0{,}0_2 1151$	$0{,}0_2 1151$	79,8	
$0{,}0\ 2146$	$0{,}0_2 1680$	$0{,}0_2 1680$	78,3	$\mu_\infty = 85{,}0$
$0{,}0\ 3520$	$0{,}0_2 2655$	$0{,}0_2 2655$	75,4	
$0{,}0\ 4851$	$0{,}0_2 3557$	$0{,}0_2 3557$	73,3	

5. *Conduttività di una soluzione* 0,0107 mol. H_2CH_3 *dopo l'aggiunta di quantità variabili di* $KHCO_3$ (m cost. = 0,0107). — *Temp. 18° C.*

Moli $KHCO_3$ per litro $= n$	Conduttività trovata, diminuita della conduttività dell'acqua $= x$	Conduttività corretta: $x_2 = x - \frac{0{,}0_6 128 \times 0{,}0107}{n}$	Conduttività molecolare: $\mu = 1000 \frac{x_2}{n}$	
0,00912	$0{,}0_3 9182$	$0.0_3 9181$	100,7	
0,01807	$0{,}0_2 1772$	$0{,}0_2 1772$	98,1	
0,02684	$0{,}0_2 2558$	$0{,}0_2 2558$	95,3	$\mu_\infty = 104{,}1$
0,03545	$0{,}0_2 3311$	$0{,}0_2 3311$	93,4	

6. *Conduttività di una soluzione* 0.0298 mol. H_2CO_3 *dopo l'aggiunta di quantità variabili di* $NaHCO_3$ (*m* cost. = 0,0298). — *Temp. 18° C.*

Moli $NaOH_3$ per litro $= n$	Conduttività trovata, meno la conduttività dell'acqua $= x$	Conduttività corretta: $x_2 = x - \frac{0{,}0_6128 \times 0{,}0298}{n}$	Conduttività molecolare: $\mu = 1000\,\frac{x_2}{n}$
$0{,}0_29456$	$0{,}0_37412$	0.0_37408	78,3
0,0 1871	$0{,}0_21421$	$0{,}0_21421$	75,9
0,0 2778	$0{,}0_22063$	$0{,}0_22063$	74,3 $\}\ \mu_\infty = 81{,}6$
0,0 4535	$0{,}0_23232$	$0{,}0_23232$	71,3
0,0 6223	$0{,}0_24293$	$0{,}0_24293$	69,0

7. *Conduttività di una soluzione* 0.0405 mol. H_2CO_3 *dopo aggiunte di quantità variabili di* NaOH (*m* variabile). — *Temp. 18° C.*

(*x* dell'acqua = $0{,}0_657$).

NaOH aggiunta, moli per litro $= n$	Acido carbonico libero, moli per litro $= m$	Conduttività trovata, meno la conduttività dell'acqua $= x$	Conduttività corretta: $x_2 = x - 0{,}0_6128\,\frac{m}{n}$	Conduttività molecolare del bicarbonato $\mu = 1000\,\frac{x_2}{n}$
$0{,}0_2501$	0,0400	$0{,}0_4517$	$0{,}0_4414$	82,7
$0{,}0_3998$	0,0395	$0{,}0_4874$	$0{,}0_4823$	82.5
$0{,}0_3191$	0.0386	$0{,}0_31596$	$0{,}0_31570$	82,2
$0{,}0_2375$	0,0367	$0{,}0_33073$	$0{,}0_33060$	81.6 $\}\ \mu_\infty = 82{,}9$
$0{,}0_3702$	0.0335	$0{,}0_35657$	$0{,}0_35651$	80,5
0,0 1306	0,0274	$0{,}0_21028$	$0{,}0_21028$	78,7
0,0 2303	0,0175	$0{,}0_21762$	$0{,}0_21762$	76,5

8. *Conduttività di una soluzione* 0,0405 mol. H_2CO_3 *dopo aggiunte di quantità variabili di* KOH (*m* variabile). — *Temp. 18° C.*

(*x* dell'acqua = $0{,}0_657$).

KOH aggiunta, moli per litro $= n$	Acido carbonico libero, moli per litro $= m$	Conduttività trovata, meno la conduttività dell'acqua $= x$	Conduttività corretta: $x_2 = x - 0{,}0_6128\,\frac{m}{n}$	Conduttività molecolare del bicarbonato $\mu = 1000\,\frac{x_2}{n}$
$0{,}0_3556$	0,0399	$0{,}0_46690$	$0{,}0_45771$	103,8
$0{,}0_21083$	0,0394	$0{,}0_31168$	$0{,}0_31121$	103,5
$0{,}0_22115$	0,0384	$0{,}0_32203$	$0{,}0_32180$	103,1 $\}\ \mu_\infty = 104{,}0$
$0{,}0_34120$	0,0364	$0{,}0_34226$	$0{,}0_34215$	102,3
$0{,}0_2804$	0,0325	$0{,}0_38125$	$0{,}0_38120$	101,0
0,0 1573	0,0248	$0{,}0_21553$	$0{,}0_21553$	98,7

Le correzioni, come si vede dalle tabelle precedenti, hanno una particolare importanza soltanto per le soluzioni ricche di acido carbonico e povere di bicarbonato; di esse può farsi a meno allorquando la concentrazione del bicarbonato è maggiore di 0,01 mol. e quella dell'acido carbonico è minore di 001 mol.; è ovvio peraltro che per ottenere valori esatti per μ_∞ è necessario adoperare soluzioni assai diluite di bicarbonato.

Riassumendo i dati precedenti noi troviamo:

Tab. 4ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 85{,}0$;
Mobilità $HCO_3' = 85{,}0 - 43{,}6 = \mathbf{41{,}4}$

Tab. 5ª. Conduttività limite $KHCO_3$, $\mu_\infty = 104{,}1$;
Mobilità $HCO_3' = 104.1 - 64{,}7 = \mathbf{39{,}4}$

Tab. 6ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 81{,}6$;
Mobilità $HCO_3' = 81{,}6 - 43{,}6 = \mathbf{38.0}$

Tab. 7ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 82.9$;
Mobilità $HCO_3' = 82{,}9 - 43.6 = \mathbf{39{,}3}$

Tab. 8ª. Conduttività limite $KHCO_3$, $\mu_\infty = 104\,0$;
Mobilità $HCO_3' = 104{,}0 - 64{,}7 = \mathbf{39{,}3}$

I valori 43,6 e 64,7 corrispondono alle mobilità rispettive del sodioione e del potassioione, quali risultano dai dati più recenti di Kohlrausch.

Dalla media dei valori surriferiti, accordando però maggior valore alle ultime due misure, risulta che *la mobilità dell'ione* HCO_3' *alla temperatura 18° è eguale a 39,3* valore alquanto inferiore a quello trovato da Walker e Cormack (41,4) senza la correzione dell'idrolisi, ed a quello trovato da noi nella prima serie delle nostre ricerche (40,8), misurando soluzioni acquose di bicarbonato, e correggendo i dati per l'idrolisi del sale. Da quello che precede risulta chiaro come queste divergenze sono dovute, sia alla trascuranza dell'idrolisi, sia al fatto che le soluzioni di bicarbonato, esposte per un certo tempo all'aria, perdono acido carbonico ed acquistano di mano in mano una conduttività sempre maggiore.

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota II di Gaetano Scorza, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo.

8 (*). Un sistema di $\frac{1}{2}p(p-1)$ relazioni fra i periodi $\omega_{j,k}$ del tipo

$$(5) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\omega_{k,s} = 0 \qquad (j,k = 1,2,\ldots p\,;\ j < k),$$

dove le $c_{r,s}$ siano dei numeri intieri costituenti gli elementi di un determinante emisimmetrico d'ordine $2p$, si dirà, per i periodi $\omega_{j,k}$, un *sistema di relazioni di Riemann.*

Un sistema di relazioni di Riemann (5) si dirà poi un sistema di Riemann *principale* se, indicati con

$$\xi_j + i\eta_j \qquad (i = \sqrt{-1}\ ;\ \xi_j \text{ e } \eta_j \text{ reali}\ ;\ j = 1 \ldots 2p)$$

(*) La numerazione degli articoli, delle formule e delle note è fatta in continuazione di quella della Nota I.

i periodi di una combinazione lineare omogenea qualunque degli integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ nel fissato sistema primitivo di cicli lineari, si abbia sempre

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s > 0$$

o sempre

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s < 0 .$$

Per quanto è detto nella mia già citata Nota di Palermo ([16]), ciò equivale a dire che il sistema di relazioni di Riemann (5) è principale o non, secondo che è definita o non la forma Hermitiana nelle variabili $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (e nelle loro coniugate $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_p$) data da

$$\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\dots 2p} \sum_{j,k}^{1\dots p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \bar{\omega}_{k,s}\, \lambda_j\, \bar{\lambda}_k .$$

Per un classico teorema di Riemann e Weierstrass, poichè le $\omega_{j,k}$ sono i periodi degli integrali $u_1, u_2, \dots u_p$, *un sistema principale di relazioni di Riemann per le* $\omega_{j,k}$ *esiste certamente.*

Se i periodi $\omega_{j,k}$ sono legati dalle relazioni di due sistemi di Riemann, aventi l'uno i coefficienti $c_{r,s}$ e l'altro i coefficienti $c'_{r,s}$, i periodi stessi sono legati da tutti i sistemi di relazioni di Riemann aventi per coefficienti le $\varrho c_{r,s} + \sigma c'_{r,s}$, ove ϱ e σ sono intieri qualunque; quindi, di codesti sistemi di relazioni di Riemann, o ve n'ha uno solo — principale — (i suoi coefficienti essendo determinati a meno di un fattore di proporzionalità intero), o ve n'è tutta un'infinità discontinua assimilabile a quella dei punti razionali di uno spazio lineare.

La *caratteristica* di un sistema di relazioni di Riemann sarà la caratteristica (necessariamente pari) del relativo determinante $|c_{r,s}|$; quindi, per un teorema ben noto ([17]), la caratteristica di un sistema principale è $2p$.

9. Ora si osservi che scrivere le (5) equivale a scrivere le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema nullo razionale di Σ, rappresentato dall'equazione

$$(5^{bis}) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, y_r\, x_s = 0 ,$$

([16]) Scorza, loc. cit. [5]), n. 1.

([17]) Krazer, loc. cit. [7]), pag. 119. Del resto, questo fatto e quello invocato più sopra (cfr. la citazione [7]) son tutte e due compresi nella diseguaglianza che, coi simboli della nostra Nota di Palermo, è ivi scritta $\Delta_p > 0$ o $\Delta_1 \Delta_p > 0$.

abbia in τ (e quindi, attesa la realità delle $c_{r,s}$, anche in $\bar{\tau}$) uno spazio totale; dunque:

In Σ esistono sempre dei sistemi nulli razionali aventi in τ e $\bar{\tau}$ due spazi totali; e se ne esiste più di uno, ne esistono senz'altro infiniti, la loro totalità potendo assimilarsi a quella (discontinua) dei punti razionali di un conveniente spazio lineare.

Ciascuno di questi sistemi nulli razionali si dirà, per comodità di discorso, un *sistema nullo di* V_p (relativo al sistema prescelto di cicli lineari).

10. Quando dal sistema di relazioni di Riemann (5) per i periodi $\omega_{j,k}$ si passa al corrispondente sistema nullo (5^{bis}) di V_p, viene a perdersi, in quest'ultimo, ogni traccia della scelta dei p integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ fra gli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di V_p. Ciò significa che il sussistere delle (5) per i periodi degli integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ implica il sussistere di relazioni con gli *stessi* coefficienti per i periodi di altri p *qualsiansi* integrali semplici di 1ª specie indipendenti di V_p ([18]); quindi i coefficienti di un sistema di relazioni di Riemann dipendono non già dalla scelta

([18]) È facile comporre una dimostrazione algebrica diretta di questa circostanza. Dagli integrali $u_1, u_2, \dots u_p$ (coi periodi $\omega_{j,k}$) si passi agli integrali indipendenti $U_1, U_2, \dots U_p$ (coi periodi $\Omega_{j,k}$), essendo

$$u_j = \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{j,l} U_l , \qquad (j = 1, 2, \dots p)$$

e il determinante $|\mu_{j,l}|$ diverso da zero.

Sarà

$$\omega_{j,r} = \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{j,l} \Omega_{l,r} \qquad (j = 1, \dots p \; ; \; r = 1, 2, \dots 2p),$$

e quindi, posto

$$a_{l,m} = \sum_{r,s}^{1 \dots 2p} c_{r,s} \Omega_{l,r} \Omega_{m,s} \qquad (l, m = 1, 2, \dots p),$$

da

$$\sum_{r,s}^{1 \dots 2p} c_{r,s} \omega_{j,r} \omega_{k,s} = 0 \qquad (j, k = 1, \dots p \; ; \; j < k),$$

seguirà

$$(\alpha) \qquad \sum_{l,m}^{1 \dots p} \mu_{j,l} \mu_{k,m} a_{l,m} = 0 \qquad (j, k = 1, \dots p \; ; \; j < k).$$

Poichè $a_{m,l} = -a_{l,m}$, le $a_{l,m}$ distinte e non nulle sono $\frac{1}{2} p(p-1)$ e si ottengono tutte fissando di considerare soltanto quelle per cui $l < m$. Le relazioni lineari omogenee (α) che le legano sono appunto in numero di $\frac{1}{2} p(p-1)$; e in ciascuna delle (α) il coefficiente complessivo di una $a_{l,m}$ $(l < m)$ è del tipo $\mu_{j,l} \mu_{k,m} - \mu_{j,m} \mu_{k,l}$, cioè è un minore del 2° ordine del determinante $|\mu_{j,l}|$. Ma allora, per un noto teorema di Sylvester, le (α) sono indipendenti, e le $a_{l,m}$ sono, come volevasi, tutte nulle.

di p integrali indipendenti fra gli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di V_p, ma dalla scelta del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p.

Per render conto di questo fatto anche col linguaggio, come parliamo di sistemi nulli di V_p (relativamente a un fissato sistema di cicli), parleremo anche di *relazioni di Riemann di* V_p (relativamente a un fissato sistema di cicli), queste ultime rispondendo biunivocamente a quelli, quando si prescinda da fattori di proporzionalità intieri. E la *caratteristica* di una relazione di Riemann di V_p sarà, naturalmente, la caratteristica di uno qualunque dei sistemi di relazioni di Riemann a cui essa dà luogo.

Ma v'è di più. Se il sistema (5) di relazioni di Riemann fra i periodi $\omega_{j,k}$ è un sistema principale, basta tener conto della prima definizione data di sistemi principali, per accorgersi che sono principali *tutti* i sistemi di relazioni di Riemann provenienti, col sistema (5), da una stessa relazione di Riemann di V_p; quindi, anzi che di sistemi di relazioni di Riemann principali o non, potremo, meglio, parlare di *relazioni di Riemann* e di *sistemi nulli — di* V_p *— principali o non.*

Notisi che i sistemi nulli principali sono tutti *non* singolari, e *di essi ne esiste sempre almeno uno.*

11. Abbiamo già detto quale sia su τ e $\bar{\tau}$ l'effetto di un cambiamento nella scelta del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p; quindi possiamo dire, senz'altro, che il cambiare questo sistema equivale ad applicare ai sistemi nulli di V_p relativi all'antico sistemi di cicli una omografia unimodulare razionale, per la quale appunto sistemi nulli razionali vanno in sistemi nulli razionali.

Facciamo vedere che per una tale trasformazione omografica *i sistemi nulli principali si mutano in sistemi nulli principali*; dopo ciò, la nomenclatura introdotta apparirà del tutto giustificata ed opportuna, e la sua importanza verrà posta in tutta la luce desiderabile.

La cosa è intuibile *a priori*, e risulta incidentalmente dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane che daremo altrove; ma si può dimostrare agevolmente col breve calcolo che segue.

Sia

$$(6) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\omega_{k,s} = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots p\ ;\ j<k)$$

un sistema principale di relazioni di Riemann per i periodi $\omega_{j,k}$.

Effettuando sui periodi $\omega_{j,k}$ la sostituzione unimodulare a coefficienti interi

$$(7) \qquad \omega_{j,k} = \sum_{l=1}^{l=2p} h_{k,l}\,\Omega_{j,l} \qquad (j = 1, 2, \ldots p\ ;\ k = 1, 2, \ldots 2p)\,,$$

il sistema di Riemann (6) si muta nel sistema di relazioni di Riemann per i periodi trasformati $\Omega_{j,l}$ dato dalle equazioni

$$(8) \qquad \sum_{lm}^{1\ldots 2p} C_{l,m}\,\Omega_{j,l}\,\Omega_{k,m} = 0 \qquad (j,k = 1,\ldots p\ ;\ j < k)\,,$$

ove

$$C_{l,m} = \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\,h_{r,l}\,h_{s,m}\,.$$

Per la sostituzione (7), la forma Hermitiana

$$\frac{1}{2i}\sum_{r,s}^{1\ldots 2p}\sum_{j,k}^{1\ldots p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\bar{\omega}_{k,s}\,\lambda_j\,\bar{\lambda}_k\,,$$

diventa

$$\frac{1}{2i}\sum_{l,m}^{1\ldots 2p}\sum_{j,k}^{1\ldots p} C_{l,m}\,\Omega_{j,l}\,\bar{\Omega}_{k,m}\,\lambda_j\,\bar{\lambda}_k\,;$$

dunque anche il sistema di Riemann (8) è, come (6), un sistema principale.

12. Se un sistema nullo di Σ ha in τ e $\bar{\tau}$ due spazî totali e ha per asse un S_{2l-1}, questo S_{2l-1} deve trovarsi con ciascuno degli spazî τ e $\bar{\tau}$ in un S_{p+l-1}, e quindi deve tagliare τ e $\bar{\tau}$ in spazî la cui dimensione non può essere inferiore a

$$(p-1)+(2l-1)-(p+l-1) = l-1\,.$$

D'altra parte, poichè τ e $\bar{\tau}$ sono indipendenti, uno spazio di τ (o di $\bar{\tau}$) di dimensione superiore ad $l-1$ non può esser congiunto a uno spazio di $\bar{\tau}$ (o di τ) di dimensione uguale o superiore ad $l-1$ da un S_{2l-1}; dunque quell' S_{2l-1} taglia τ e $\bar{\tau}$ in spazî che hanno proprio la dimensione $l-1$.

Ciò dimostra che:

Se fra i sistemi nulli di V_p *ve n'è uno dotato di asse,* V_p *ammette un sistema regolare di integrali riducibili avente per asse l'asse del considerato sistema nullo.*

Questo teorema, come risulterà dalle osservazioni che seguono, è invertibile; e quindi:

I sistemi regolari di integrali riducibili di V_p *della dimensione* $q-1$ *sono tanti, quanti sono gli assi distinti* (*di dimensione* $2q-1$) *dei sistemi nulli singolari di* V_p *di specie* $2q$.

In base a questo risultato, si vede che lo studio della totalità dei sistemi regolari di integrali riducibili di V_p è intimamente legato a quello della varietà dei sistemi nulli o complessi lineari di Σ aventi in τ e $\bar{\tau}$ due spazî totali.

Ci riserbiamo pertanto di ritornarvi quando avremo utilizzato questa stessa varietà per lo studio delle funzioni abeliane singolari: qui ci limitiamo a far osservare che è facile assegnare un massimo per la dimensione dello spazio lineare che dà coi suoi punti razionali, nel modo detto più sopra, una rappresentazione della totalità dei sistemi nulli di V_p.

Tale massimo è $p^2 - 1$, *e può essere effettivamente raggiunto.*

13. Sia Π un sistema nullo di V_p, privo di spazio singolare, e A un sistema regolare di integrali riducibili di V_p della dimensione $q - 1$; un sistema nullo come Π esiste certo, qualunque sia V_p.

L'asse A_1 di A è un S_{2q-1} razionale, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo le imagini α e $\bar{\alpha}$ di A: dunque lo spazio polare di A_1 rispetto a Π è un $S_{2(p-q)-1}$ razionale, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo due spazî imaginarii coniugati β e $\bar{\beta}$ della dimensione $p - q - 1$; ma allora questo $S_{2(p-q)-1}$ è l'asse B_1 di un sistema regolare B di V_p della dimensione $p - q - 1$, e quindi abbiamo, intanto, che:

Se V_p *ammette un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione* $q - 1$, *ammette pure un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione* $p - q - 1$.

14. Due sistemi regolari, come gli A e B del teorema precedente, per cui esiste un sistema nullo di V_p non singolare, tale che rispetto ad esso l'asse dell'un sistema sia lo spazio polare dell'asse dell'altro, si diranno *associati*; due sistemi regolari indipendenti, le cui dimensioni abbiano per somma $p - 2$, si diranno, col Severi, *complementari* (19).

15. Siano A e B due sistemi regolari associati di integrali riducibili di V_p; saranno essi anche complementari, cioè indipendenti?

La risposta è certo affermativa se, per es., nè A nè B contengono un sistema regolare di dimensione inferiore alla propria, e A e B sono distinti; ma un caso assai più interessante, in cui la risposta è sempre affermativa, è dato dal seguente teorema:

Se esiste un sistema nullo principale di V_p, *rispetto a cui gli assi di* A *e* B *sono l'uno polare dell'altro*, A *e* B *sono non solo associati ma anche complementari.*

Supponiamo, come è lecito, che A sia il sistema determinato dai q integrali $u_1, u_2, \ldots u_q$, e che la tabella (I) (Nota I) dei periodi primitivi abbia l'aspetto

$$(9) \qquad \left| \begin{array}{llll} \omega_{1,1} \ldots \omega_{1,2q} & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \omega_{2,1} \ldots \omega_{2,2q} & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \omega_{q,1} \ldots \omega_{q,2q} & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \omega_{q+1,1} \ldots \omega_{q+1,2q} & \omega_{q+1,2q+1} \ldots \omega_{q+1,2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{p,1} \ldots \omega_{p,2q} & \omega_{p,2q+1} \ldots \omega_{p,2p} \end{array} \right| ;$$

(19) Severi, loc. cit. 2), pag. 585.

ciò è sempre ottenibile con un conveniente mutamento del sistema primitivo dei cicli lineari sulla riemanniana di V_p, con che i sistemi nulli principali vanno in sistemi nulli principali.

Poi sia

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, y_r\, x_s = 0 \tag{10}$$

l'equazione del considerato sistema nullo principale.

Poniamo

$$\omega_{j,k} = \alpha_{j,k} + i\beta_{j,k} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

con le $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$ reali e costruiamo il determinante Δ, d'ordine $2p$, le cui prime p righe sono date da quelle della matrice (9) quando al posto delle $\omega_{j,k}$ si supponga di sostituire le $\alpha_{j,k}$ e le successive p righe sono date da quelle della matrice ottenuta sempre da (9) scrivendo $\beta_{j,k}$ al posto di $\omega_{j,k}$.

Allora, se si indica con

$$P_{j_1 j_2 \dots j_{2l}}$$

lo pfaffiano del minore principale del determinante $|c_{r,s}|$ formato con le righe e le colonne $j_1^{ma}, j_2^{ma}, \dots j_{2l}^{ma}$, e con

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_{2l}}$$

il minore di Δ formato con le righe

$$1^a, 2^a, \dots l^{ma}, (p+1)^{ma}, \dots (p+l)^{ma}$$

e le colonne

$$j_1^{ma}, j_2^{ma}, \dots j_{2l}^{ma},$$

posto

$$\Delta_l = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} \sum_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} P_{j_1, j_2, \dots j_{2l}}\, \delta_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} \tag{11}$$

$$(j_1, j_2, \dots j_{2l} = 1 \dots 2p \; ; \; j_1 < j_2 < \dots < j_{2l}),$$

dire che (10) è un sistema nullo principale di V_p equivale ad affermare che le Δ_l son tutte diverse da zero, quelle di indice pari essendo tutte positive e quelle di indice dispari essendo tutte dello stesso segno.

È quanto risulta dalla dimostrazione contenuta nella nostra Nota sul teorema d'esistenza delle funzioni abeliane.

Poichè le $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$ per $j = 1 \dots q$ e $k = 2q+1, \dots 2p$ sono tutte nulle, Δ_q si riduce al prodotto di

$$(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\, \delta_{1,2,\dots 2q}$$

per lo pfaffiano del determinante emisimmetrico

$$C = \begin{vmatrix} 0 & c_{1,2} & c_{1,3} \dots & c_{1,2q} \\ c_{2,1} & 0 & c_{2,3} \dots & c_{2,2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{2q,1} & c_{2q,2} & c_{2q,3} \dots & 0 \end{vmatrix};$$

dunque sarà certo

(12) $$C \neq 0 .$$

Ora l'asse A_1 del sistema regolare A è, nel caso in esame, l'S_{2q-1} di Σ secondo cui si tagliano gli iperpiani

$$x_{2q+1} = 0 \dots x_{2p} = 0 :$$

quindi il sistema nullo subordinato dal sistema nullo (10) in questo S_{2q-1} ha per equazione, nell'S_{2q-1} medesimo,

(13) $$\sum_{r,s}^{1 \dots 2q} c_{rs}\, y_r\, x_s = 0 ,$$

cioè l'equazione che si ricava dalla (10) sopprimendovi tutti i termini che contengono coordinate con indice superiore a $2q$.

In virtù di (12), il sistema nullo (13) è certo non singolare, e quindi A_1 e B_1 sono, come volevasi, indipendenti.

Di qua, una volta che V_p ammette sempre un sistema nullo principale, almeno, risulta subito il classico teorema di Poincaré:

Se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ammette un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $q - 1$, *ammetterà anche un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione* $p - q - 1$ *indipendente dal primo.*

Osservazione. — Gli integrali $u_1 , u_2 \dots u_q$, si possono riguardare come q integrali semplici di 1ª specie indipendenti di una varietà algebrica V_q di irregolarità superficiale q; ebbene per questa V_q l'asse A_1 di A ha lo stesso ufficio che Σ ha per V_p e le imagini α e $\bar{\alpha}$ di A hanno lo stesso ufficio che τ e $\bar{\tau}$ per V_p; quindi il sistema nullo (13), che appunto ha due spazî totali in α ed $\bar{\alpha}$, è un sistema nullo di V_q. Ma non basta. Siccome le $\Delta_1 , \Delta_2 , \dots \Delta_q$ involgono soltanto i periodi di $u_1 , u_2 , \dots u_q$ e i soli coefficienti dell'equazione (13), le diseguaglianze che esprimono l'ipotesi fatta sul sistema nullo (10) implicano, senz'altro, che anche il sistema nullo (13) è in A_1 un sistema nullo principale di V_q; dunque:

Un sistema nullo principale di V_p *induce nell'asse di un qualsiasi sistema regolare appartenente a* V_p *un sistema nullo che è sistema nullo*

principale per la picardiana a cui competono gli integrali del considerato sistema regolare.

16. Il sistema nullo singolare avente per asse l'asse B_1 del sistema indicato nel n. prec. con B e riflettente in A_1 il sistema nullo (13) è un sistema nullo razionale avente in τ e $\bar{\tau}$ due spazî totali; ora, dei due sistemi A e B, *uno* dei due, per es. B, è un qualsiasi sistema regolare di integrali riducibili di V_p; dunque:

L'asse di un sistema regolare di integrali riducibili di V_p è pure asse di un sistema nullo singolare di V_p.

Con ciò è invertito il primo teorema del n. 11.

17. Abbiamo visto che due sistemi regolari associati di V_p, almeno sotto qualche condizione, sono anche complementari (20); invece:

Due sistemi complementari sono sempre due sistemi associati.

E infatti, siano A e B i due sistemi complementari di V_p delle dimensioni rispettive $q-1$ e $p-q-1$; A_1 e B_1 i loro assi; α e $\bar{\alpha}$, β e $\bar{\beta}$ le loro imagini.

Sia π_1 un sistema nullo razionale di A_1 che abbia due spazî totali in α e $\bar{\alpha}$; un tal sistema nullo, per quanto risulta dal n. 15 esiste certamente. Poi si indichi con Π_B il sistema nullo (razionale) di Σ che ha per asse B_1 e induce in A_1 il sistema nullo π_1.

Evidentemente, Π_B avrà due spazî totali in τ e $\bar{\tau}$.

Si costruisca, procedendo in modo analogo, un sistema nullo razionale di Σ, Π_A, che abbia per asse A_1 e due spazî totali in τ e $\bar{\tau}$.

I sistemi nulli del fascio determinato da Π_A e Π_B sono tutti, all'infuori di Π_A e Π_B, non singolari; e rispetto a ciascuno di essi, A_1 ha per spazio polare B_1. D'altra parte, fra questi sistemi nulli ve ne sono infiniti che sono razionali; dunque A e B sono, come volevasi, associati.

18. Fin qui non ci siamo valsi che delle corrispondenze stabilite fra gli S_k ed S_{2p-k-2} di Σ dai sistemi nulli di V_p non singolari; ma anche quelli singolari dànno luogo, nello stesso modo, a qualche conseguenza, su cui, per altro, riteniamo inutile di fermarci adesso.

19. Nei teoremi dimostrati è implicitamente contenuto il legame richiesto fra la presenza di sistemi regolari riducibili nel sistema degli integrali (semplici di 1ª specie) di V_p e le relazioni di Riemann che intercedono fra i periodi di questi ultimi: basta, per accorgersene, enunciarli in linguaggio algebrico, anzi che geometrico.

Si ottiene così la seguente proposizione che involge e precisa il teorema di Poincaré:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebrica di irregolarità superficiale p contenga un sistema regolare di integrali sem-

(20) Che due sistemi associati possano non essere complementari si mostra subito con esempi.

plici di 1ª specie riducibili, è che fra le sue relazioni di Riemann (relative a un fissato sistema primitivo di cicli lineari) ne esista qualcuna di caratteristica inferiore a $2p$.

Ove esista una di queste relazioni di caratteristica $2q$ $(q < p)$, *ne esiste anche una di caratteristica* $2(p - q)$, *tale che il fascio di relazioni che esse determinano non contiene altre relazioni di caratteristica inferiore a* $2p$.

Si badi che a una relazione di Riemann di caratteristica $2q$ $(q < p)$ risponde sulla V_p un ben determinato sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili; quello cioè che ha per asse l'asse del sistema nullo singolare di V_p rispondente alla considerata relazione di Riemann. Ma poichè per $p > 2$ possono aversi sistemi nulli singolari di V_p diversi aventi lo stesso asse, uno stesso sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili di V_p può provenire da infinite relazioni di Riemann a caratteristica $2q$ (appartenenti a uno stesso sistema lineare).

Ciò non sussiste, come è chiaro, per il caso $p = 2$; e quindi, per $p = 2$, *la corrispondenza in discorso è perfettamente biunivoca.*

E. M.